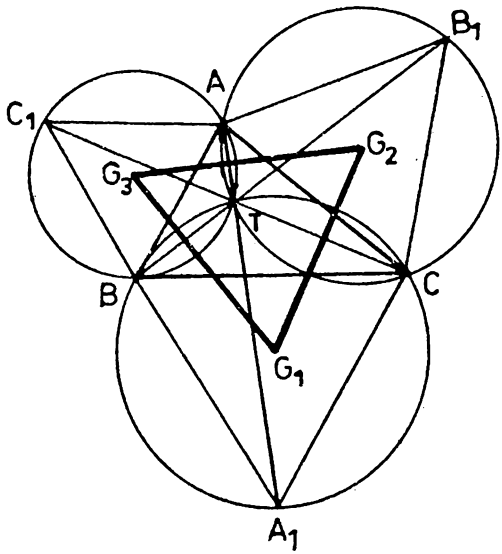
CONSTANTIN COCEA



200 DE PROBLEME

DIN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI ECHILATERAL

Editura — GH. ASACHI — Iaşi

200 DE PROBLEME DIN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI ECHILATERAL

Constantin Cocea

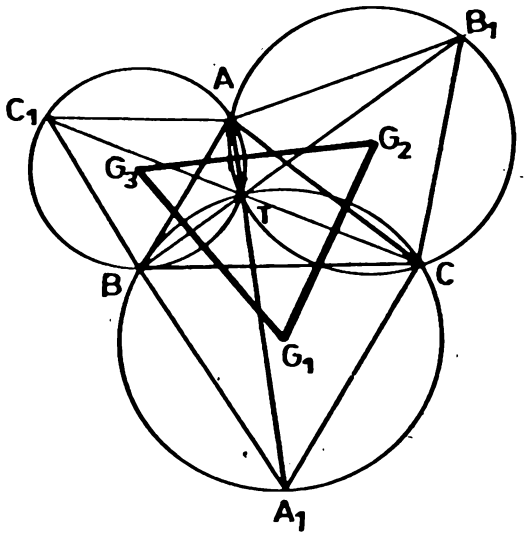
Editura **Gh. ASACHI** Iaşi
1992

Referenţi ştiinţifici:

CONF. DR. **IOAN POP**
LECTOR DR. **DRAGOŞ HRIMIUC**

Desenele au fost executate de ing. **RODICA DRAGOSLAV**
Procesarea şi culegerea textului în Times Roman au fost executate de
DIGITAL MAINTENANCE AND APPLICATIONS Ltd., IAŞI, 981-35877, telex 22377 vgvis

CONSTANTIN COCEA



200 DE PROBLEME
DIN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI ECHILATERAL

Editura — GH. ASACHI — Iaşi

CUVÎNT ÎNAINTE

Profesorul Constantin Cocea , un împătimit rezolvitor şi propunător de probleme de matematică, este printre cei care, ca elev, a reprezentat România la Olimpiada Internaţională de Matematică.

Pasiunea sa pentru matematica "elementară" a rămas aceeaşi şi după absolvirea în mod strălucit a Facultăţii de Matematică din Iaşi şi chiar după ce a devenit doctorand în domeniul modern şi dificil al varietăţilor diferenţiabile.

Autorul acestei cărţi ştie că matematica gimnazială şi liceală este elementară numai în măsura în care rămîi la suprafaţa lucrurilor. O pasiune adevărată şi o minte iscoditoare pot găsi în simplitatea aparentă a matematicii şcolare subtilităţi şi dificultăţi nebănuite.

Problemist bine cunoscut în întreaga ţară, apreciat pentru stilul său concis şi rezultatele sale cu totul surprinzătoare, profesorul C. Cocea oferă prin prezenta culegere un model de originalitate. Ceea ce puţini şi-ar fi putut imagina, anume, că se poate realiza o culegere de probleme numai asupra triunghiului echilateral, autorul a reuşit într-un mod captivant.

Fiind deja la a doua carte (coautor la "Planul şi spaţiul euclidian", Editura Academiei, 1986), prin această excelentă nouă apariţie editorială, profesorul C.Cocea se consacră între importanţii autori români în domeniul matematicii şcolare.

Conf. univ. dr. I. Pop
Facultatea de Matematică

CUPRINS

Capitolul 1 Probleme diverse 9

Capitolul 2 Condiţii necesare şi suficiente ca un triunghi să fie echilateral . . . 63

Capitolul 3 Probleme de construcţii geometrice şi locuri geometrice 79

Capitolul 4 Probleme date la concursuri şi olimpiade 87

Capitolul 5 Probleme de calcul vectorial 103

Capitolul 6 Probleme legate de teorema lui Pompeiu 107

Capitolul 7 Probleme rezolvate cu numere complexe 114

CAPITOLUL 1

PROBLEME DIVERSE

1. Fie $ABCD$ un pătrat. Pe latura AB se construieşte în interiorul pătratului triunghiul echilateral ABE iar pe latura BC se construieşte spre exterior triunghiul echilateral BCF. Să se arate că punctele D, E, F sînt coliniare.

Soluţie

Avem:

$AD \equiv AE \Rightarrow \Delta ADE$ isoscel;

cum $\sphericalangle DAE = 90° - 60° = 30°$

rezultă $\sphericalangle ADE = (180° - 30°)/2 = 75°$

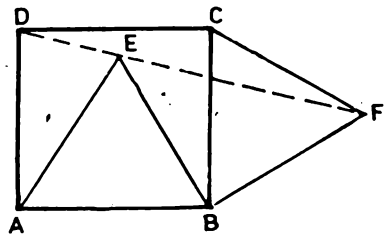
Prin urmare $\sphericalangle CDE = 90° - \sphericalangle ADE = 90° - 75° = 15°$

$CD \equiv CF$ rezultă că triunghiul CDF este isoscel.

Cum $\sphericalangle DCF = 90° + 60° = 150°$ rezultă

$\sphericalangle CDF = (180° - 150°)/2 = 15°$

Din $\sphericalangle CDE \equiv \sphericalangle CDF = 15°$ rezultă că punctele D, E, F, sînt coliniare.



2. Fie $ABCD$ un paralelogram. Pe laturile AB și BC se construiesc spre exterior triunghiurile echilaterale ABE și BCF. Să se arate că triunghiul DEF este echilateral.

Soluție

Fie $\sphericalangle ABC = \alpha$

Avem $\sphericalangle EBF = 360° - \alpha - 60° - 60° = 240° - \alpha$

$\sphericalangle DCF = (180° - \alpha) + 60° = 240° - \alpha$

$\sphericalangle DAE = (180° - \alpha) + 60° = 240° - \alpha$

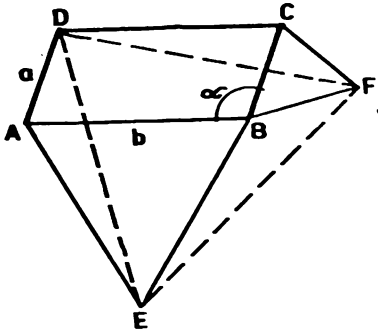
Avem:

$\Delta DAE \equiv \Delta DCF \equiv \Delta EBF$

$\begin{cases} DA \equiv CF \equiv BF = a \\ AE \equiv DC \equiv BE = b \\ \sphericalangle EBF \equiv \sphericalangle DCF \equiv \sphericalangle DAE = 240° - \alpha \end{cases}$

(a, b fiind lungimile laturilor paralelogramului)

Din congruența celor 3 triunghiuri rezultă $DE \equiv DF \equiv EF$, deci triunghiul DEF este echilateral.



3. Fie $ABCD$ un pătrat iar M interior pătratului astfel încît $\sphericalangle MCD = \sphericalangle MDC = 15°$. Să se arate că triunghiul MAB este echilateral.

Soluția 1

Fie N încît $\sphericalangle NAD = \sphericalangle NDA = 15°$

Evident $\sphericalangle MDN = 60°$ și cum $MD \equiv ND$ triunghiul MDN este echilateral

Urmează $NM \equiv ND \equiv NA$

Avem $\sphericalangle ANM = 360° - \sphericalangle AND - \sphericalangle DNM = 360° - 150° - 60° = 150°$.

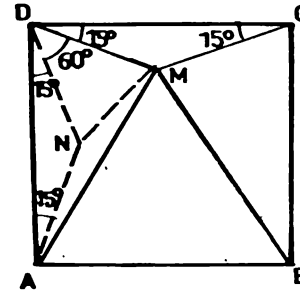
Triunghiurile isoscele AND și ANM sînt congruente:

$\begin{cases} ND = NM \\ MA \text{ latură comună} \\ \sphericalangle AND \equiv \sphericalangle ANM = 150° \end{cases}$

Urmează $AM = AD = l$ — latura pătratului

Analog $BM = l$

Deci ΔMAB este echilateral



Soluția 2

Construim triunghiul echilateral CDN

Avem:

$\sphericalangle DMC = 180° - 30° = 150°$

Deci $\sphericalangle NMD = \sphericalangle NMC = \dfrac{150°}{2} = 75°$

Dar $\sphericalangle NDM = 60° + 15° = 75°$. Deci $NM = ND = DC = AD$

Cum $NM = AD$ și $NM \parallel AD$ (ca fiind perpendiculare pe DC) rezultă $ADNM$ paralelogram, deci $MA = DN = DC = l$ - latura patratului

Analog $BM = l$. Deci AMB este echilateral.

Soluția 3

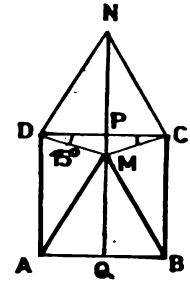
Fie P, Q intersecțiile perpendicularei pe AB cu AB și DC.

Avem $\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = 2 - \sqrt{3}$

$MP = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})$ și $MQ = 1 - \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Teorema lui Pitagora aplicată în ΔMAQ dă:

$MA = l$. Deci MAB este echilateral.



4. Fie $ABCD$ un dreptunghi. Pe laturile AB și BC se construiesc spre exterior respectiv spre interior triunghiurile echilaterale ABE și BCF. Să se arate că:

$$\sigma[EBF] = 2\sigma[ABF]$$

Admitere I.P.Iași 1990

Soluție

Fie $AB = a$ și $CD = b$

Evident $\sphericalangle FBE = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

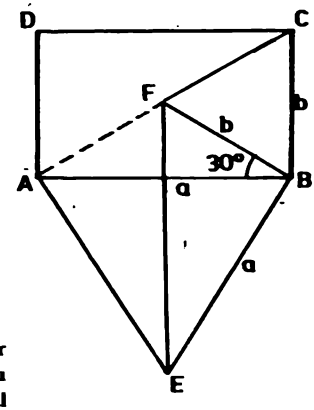
Atunci $\sigma[EBF] = \frac{a \cdot b}{2}$ (1)

Dar

$\sigma[ABF] = \frac{a \cdot b \sin 30^\circ}{2} = \frac{ab}{4}$ (2)

Din (1) și (2) rezultă

$$\sigma[EBF] = 2\sigma[ABF]$$



5. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic cu $A = 60^\circ$ iar B' și C' picioarele înălțimilor din B și C. Notăm cu M mijlocul laturii BC. Să se arate că triunghiul $MB'C'$ este echilateral.

Dată la admitere în I.P.I. 1980

Soluție

Deoarece MC' și MB' sînt mediane în triunghiurile dreptunghice $BC'C$ și $BB'C$ avem:

$MC' = MB' = BC/2$

Deci triunghiul $MC'B'$ este isoscel.

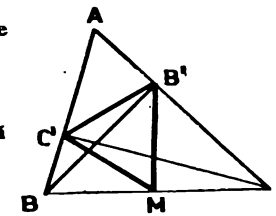
Triunghiul MBC' fiind isoscel ($MC' = MB$) rezultă că

$\sphericalangle C'MB = 180^\circ - 2B$

Analog $\sphericalangle B'MC = 180^\circ - 2C$

Urmează că $\sphericalangle C'MB' = 180^\circ -$

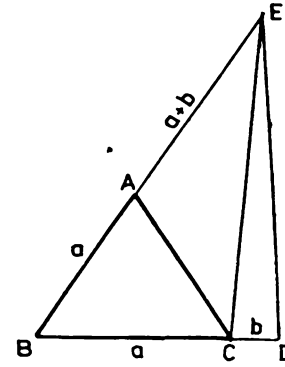
$-(180^\circ - 2B + 180^\circ - 2C) =$



$= 180° - 360° - 2(\hat{B} + \hat{C}) =$
$= 180° - (360° - 240°) = 60°$
Rezultă că triunghiul $MB'C'$ este echilateral.

6. Se consideră un triunghi echilateral de latură a. Se prelungeşte latura BC cu $CD = b$ şi latura BA cu $AE = a + b$. Să se arate că triunghiul ECD este isoscel.

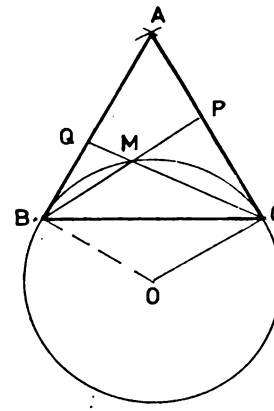
Admitere 1981



Soluţie

Teorema cosinusului aplicată în triunghiul EBC ne dă:
(1) $CE^2 = (2a + b)^2 + a^2 - a(2a + b) =$
$= 4a^2 + 4ab + a^2 + b^2 - 2a^2 - ab = 3a^2 + 3ab + b^2$
Teorema cosinusului aplicată în triunghiul EBD ne dă:
(2) $ED^2 = (2a + b)^2 + (a + b)^2 -$
$- (a + b)(2a + b) = 4a^2 + 4ab + b^2 + a^2 + 2ab +$
$+ b^2 - 2a^2 - 3ab - b^2 = 3a^2 + 3ab + b^2$
Din (1) şi (2) rezultă $EC = ED$, deci triunghiul ECD este isoscel.

7. Se dă un triunghi echilateral ABC şi cercul tangent în B şi C la laturile AB şi AC. Se uneşte un punct M situat pe arcul BC din interiorul triunghiului cu B şi C. Dreptele BM şi CM întîlnesc laturile AC şi AB în Q şi P.
Arătaţi că $AP + AQ$ = const.



Soluţie

$AB = BC$
$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle PAB = \sphericalangle QBC = 60° \\ \sphericalangle PBA = \sphericalangle QBC = \overset{\frown}{BM}/2 \end{array}\right\}$
$\Delta PAB \equiv \Delta QBC \Rightarrow PA = QB \Rightarrow AP + AQ = l =$ const.

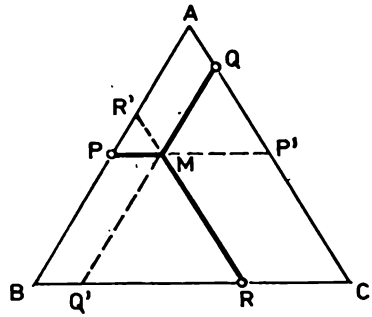
8. Fie ABC un triunghi echilateral, iar M un punct în interiorul său. Paralela prin M la BC taie pe AB în P, paralela prin M la AB taie pe AC în Q, iar paralela prin M la AC taie pe BC în R.
Să se arate că:
$MP + MQ + MR$ = const.

C. Cocea

Soluţie

Fie notaţiile ca în figura de mai jos:
Evident că triunghiurile MPR', MQP' şi MRQ' sînt echilaterale.
Rezultă

(1) $MP = PR'$
(2) $MR = MQ'$
Dar $AQMR'$ şi $BPMQ'$ sînt, evident, paralelograme deci:
(3) $MQ = R'A$
(4) $MQ = PB$
Din (2) şi (4) rezultă
(5) $MR = PB$
Din relaţiile (1), (3) şi (5) rezultă
$MP + MQ + MR = PR' + R'A + BP = AB = 1$
latura triunghiului



9. Fie $ABCD$ un trapez isoscel, O intersecţia diagonalelor cu unghiul ascuţit al diagonalelor de 60°. Notăm cu M, N, P mijloacele segmentelor OB, OC respectiv AD. Să se arate că triunghiul PMN este echilateral.

C. Cocea

Soluţie

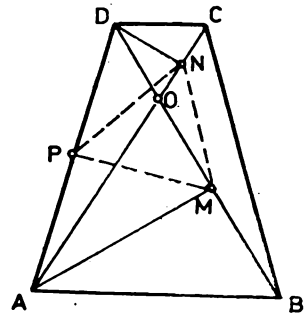
Triunghiurile ODC şi OAB fiind evident, echilaterale rezultă $DN \perp AC$ şi $AM \perp DB$.
Deci triunghiurile AND şi AMD sînt dreptunghice.
Cum NP şi MP sînt mediane relative la ipotenuză rezultă

$NP = \frac{AD}{2}$ şi

$MP = \frac{AD}{2}$

Dar NM este linie mijlocie în triunghiul OBC; urmează $MN = \frac{BC}{2}$

Cum $BC = AD$ rezultă
$NP = MP = MN$, ceea ce probează faptul că triunghiul PNM este echilateral.



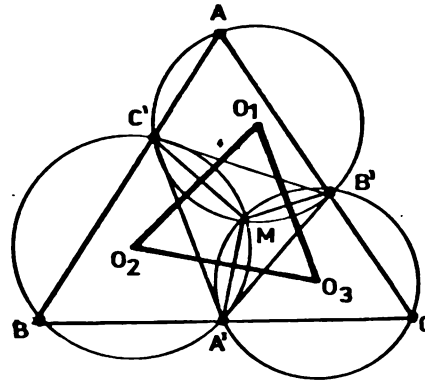
10. Fie ABC un triunghi echilateral, iar $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$. Să se arate că centrele O_1, O_2, O_3 ale cercurilor circumscrise triunghiurilor $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ formează un triunghi echilateral.

C. Cocea

Soluţie

Se ştie că cercurile circumscrise triunghiurilor $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ trec printr-un acelaşi punct pe care îl notăm cu M.

Linia centrelor O_1O_2 este perpendiculară pe MC' şi, la fel, $O_1O_3 \perp MB'$. Cum $\sphericalangle C'MB' = 120°$, urmează că $\sphericalangle O_2O_1O_3 = 60°$. La fel se demonstrează că $\sphericalangle O_1O_2O_3 = 60°$, deci triunghiul $O_1O_2O_3$ este echilateral.



11. Fie ABC un triunghi isoscel cu $\hat{A} = 20°$. Ducem BF, $F \in (AC)$ încît $\sphericalangle FBC = 20°$ şi BE, $E \in (AB)$ încît $\sphericalangle BCE = 50°$ Să se arate că triunghiul BEF este echilateral

Soluţie

Avem $\sphericalangle ACB = \dfrac{180° - \hat{A}}{2} = 80°$

$\sphericalangle BFC = 180° - (20° + 80°) = 80°$

Deci triunghiul BFC este isoscel, prin urmare $BF = BC$.

Dar $\sphericalangle BEC = 180° - (\sphericalangle EBC + \sphericalangle ECB) = 180° -$

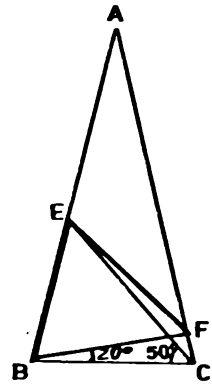
$- (80° + 50°) = 50°$

Deci $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BCE = 50°$

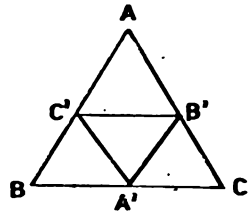
rezultă $BE = BC$

Prin urmare $BE = BF$

Cum $\sphericalangle EBF = \sphericalangle ABC - \sphericalangle FBC = 80° - 20° = 60°$, rezultă că triunghiul BEF este echilateral.



12. În interiorul unui triunghi echilateral de latură 2 se consideră 5 puncte oarecare. Să se arate că există cel puţin două puncte la o distanţă cel mult egală cu 1.



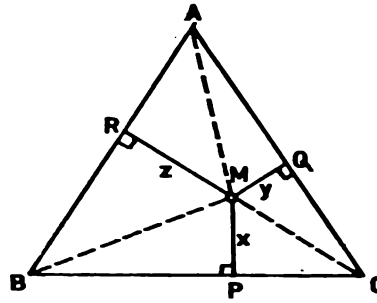
Soluţie

Fie ABC un triunghi echilateral de latură $l = 2$ iar A', B', C' mijloacele laturilor. Unind punctele A', B', C' se formează

patru triunghiuri echilaterale de latură 1. Avînd 5 puncte, cel puţin două puncte se vor găsi în interiorul sau pe laturile unui triunghi din cele patru. Dacă P şi Q sînt două puncte în interiorul sau pe laturile unui triunghi echilateral se demonstrează uşor că PQ este cel mult cît latura triunghiului.

Deci distanţa dintre cele două puncte ce se găsesc în interiorul unui triunghi din cele patru triunghiuri este cel mult 1.

13. Fie ABC un triunghi echilateral iar M un punct oarecare în interiorul său. Să se demonstreze că suma distanţelor lui M la laturile triunghiului este constantă.



Soluţie

Notăm cu l latura triunghiului, iar cu x, y, z distanţele la laturi, avem: $\sigma[ABC] = \sigma[MBC] + \sigma[MCA] + \sigma[MAB] = \frac{lx}{2} + \frac{ly}{2} + \frac{lz}{2} = \frac{1}{2}(x + y + z)$

De unde:

$x + y + z = 2\,\frac{\sigma[ABC]}{l} = h$, unde

h este înălţimea triunghiului echilateral.

14. Dacă M_i, $i = 1, 2, 3$ sînt puncte necoliniare situate în interiorul sau pe laturile triunghiului ABC astfel încît suma distanţelor la laturile triunghiului să fie aceeaşi pentru fiecare punct M_i, atunci triunghiul este echilateral.

Constanţa Matei, Bucureşti

Soluţie

Fie x_i', y_i', z_i' distanţele lui M_i la laturile triunghiului. Notăm $x'_i + y'_i + z'_i = k$

Prin M_1 ducem paralele la AC şi BC şi notăm cu x_1, y_1 lungimile laturilor paralelogramului M_1NCP, notăm cu S aria triunghiului ABC iar cu a, b, c laturile.

Din triunghiurile haşurate M_1N_1N şi M_1P_1P avem:

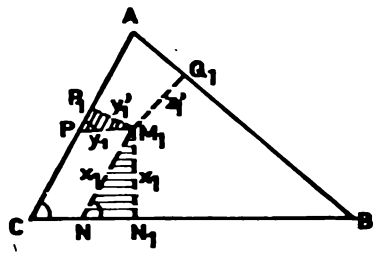
$x_1 = x_1 \sin C$, $y'_1 = y_1 \sin C$

Dar: (1) $ax'_1 + by'_1 + cz'_1 = 2S$

(2) $x'_1 + y'_1 + z'_1 = k$

Eliminînd din (1) şi (2) pe z'_1 avem

(3) $x'_1(a - c) + y'_1(b - c) + ck - 2S = 0$



sau: (4) $x_1(a - c) + y_1(b - c) + \rho = 0$, unde am notat $\rho = \frac{ck - 2S}{\sin C}$

Procedînd analog pentru M_2 şi M_3 obţinem relaţiile:

(*) $x_i(a - c) + y_i(b - c) + \rho = 0$, $i = 1, 2, 3$

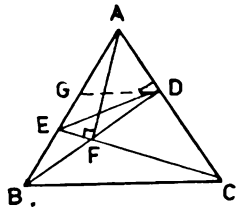
$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Punctele M_i au în sistemul oblic de axe CB, CA coordonatele x_i, y_i, $i = 1, 2, 3$; condiția de necoliniaritate (valabilă și într-un sistem oblic de axe) este:
Considerînd că (*) formează un sistem în necunoscutele $a - c$, $b - c$, ρ ; acesta fiind omogen cu $\Delta \neq 0$ nu admite decît soluția banală $a - c = 0$, $b - c = 0$, $\rho = 0$. Deci $a = b = c$, prin urmare triunghiul ABC este echilateral.

15. Pe latura AB a triunghiului echilateral ABC se ia punctul E astfel ca $2\,BE = EA$. La fel pe latura AC se ia punctul D astfel încît $CD = 2AD$. Notăm $\{F\} = BD \cap EC$.
Să se arate că $\sphericalangle AFC = 90°$

Soluție

Fie l lungimea laturii triunghiului.



Considerăm $G \in (AE)$ încît $AG = \frac{l}{3}$

Deoarece $AG = AD = \frac{l}{3}$ rezultă $GD \parallel BC$ și

$GD = \frac{l}{3}$

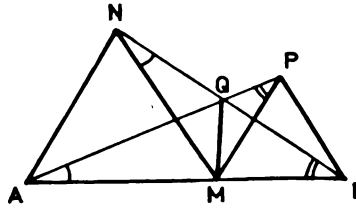
Cum $AE = \frac{2l}{3} = 2GD$ urmează că triunghiul ADE este dreptunghic în D. Triunghiurile BCE și ABD sînt congruente deoarece: $BC = AB = 1$,

$BE = AE = \frac{l}{3}$, $\sphericalangle EBC = \sphericalangle BAD = 60°$.

Urmează că $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BEC$, deci patrulaterul $ADFC$ este inscriptibil.
Rezultă că $\sphericalangle AFC = \sphericalangle ADE = 90°$ și $\sphericalangle AFC = 90°$

16. Pe segmentul AB considerăm punctul variabil M. De aceiași parte a lui AB considerăm triunghiurile echilaterale AMN și MBP. Notăm $\{Q\} = AP \cap BN$.
Să se arate că dreapta MQ trece printr-un punct fix.

Soluție

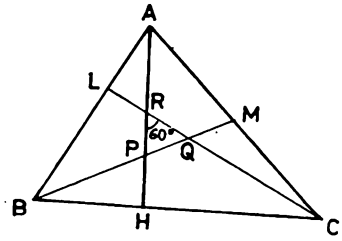


Avem $\sphericalangle AMP = \sphericalangle BMN = 120°$. Triunghiurile AMP și BMN sînt congruente deoarece
$\sphericalangle AMP = \sphericalangle BMN$, $AM = MN$, $MP = MB$. Urmează că $\sphericalangle QAM = \sphericalangle MNQ$, deci patrulaterul $AMQN$ este inscriptibil și $\sphericalangle MBQ = \sphericalangle MPQ$; deci $MBPQ$ este inscriptibil. Din inscriptibilitatea patrulaterelor $AMQN$ și $ABPQ$ rezultă că $\sphericalangle AQM = \sphericalangle ANM = 60°$ și $\sphericalangle BQM = \sphericalangle BPM = 60°$. Astfel $\sphericalangle AQB = \sphericalangle AQM + \sphericalangle BQM = 60° + 60° = 120°$
Cum segmentul AB se vede sub un unghi de 120° din Q urmează că Q este situat pe arcul capabil de 120° față de (BC). Fie L mijlocul arcului care completează pînă la un cerc arcul capabil de 120° față de (BC).
Cum $\sphericalangle AQM = \sphericalangle BMQ = 60°$ rezultă că QM este bisectoarea unghiului AQB, deci trece prin L care este punct fix.

17. Într-un triunghi ascuțitunghic neechilateral printr-un vîrf este dusă înălțimea, prin altul mediana iar prin cel de-al treilea bisectoarea. Arătați că aceste linii nu pot forma prin intersecție un triunghi echilateral.

Soluție

Fie ABC un triunghi, AH înălțimea, BM mediana iar CL bisectoare. Presupunem că PRQ este echilateral.



Din ΔCRH rezultă $\sphericalangle RCH = 90° - 60° = 30° = \frac{\hat{C}}{2}$

$\Rightarrow C = 60°$

$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle RCH = \sphericalangle MCQ = 30° \\ \sphericalangle RQP = \sphericalangle MQC = 60° \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle QMC = 90°$ și cum BM este mediană rezultă $AB = AC$

Dar $C = 60°$, prin urmare ABC este echilateral,

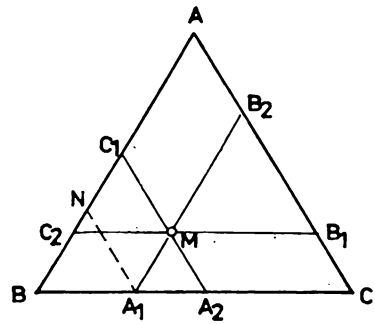
Contradicție.

18. Fie M un punct în interiorul unui triunghi echilateral. Să se arate că, cu segmentele paralele cu laturile triunghiului duse prin M, mărginite de laturile acestuia, se poate construi un triunghi.

C. Cocea

Soluție

Considerăm notațiile ca în figura de mai jos. Prin A_1 ducem paralela la AC care va tăia pe AB în N.



Vom arăta că $A_1B_2 + C_1A_2 > C_2B_1$

Evident că A_1NAB_2 și A_1NC_1M sînt paralelograme, deci $A_1B_2 = NA$ și $C_1M = NA$. Dar triunghiul BA_1N este echilateral, deci $NA_1 = BN$. Avem:

$A_1B_2 + C_1A_2 > A_1B_2 + C_1M =$

$= NA + NA_1 = NA + NB = l$

l - latura triunghiului echilateral

Dar este evident că $l > C_2B_1$

Așadar $A_1B_2 + C_1A_2 > C_2B_1$

Analog se demonstrează încă două inegalități.

Prin urmare cu segmentele A_1B_2, C_1A_2 și B_1C_2 se poate forma un triunghi.

19. Fie P un punct în interiorul unui unghi XOY avînd măsura de 30° iar A, B proiecțiile lui P pe laturile unghiului. Notăm cu Q mijlocul segmentului OP.

Să se arate că triunghiul QAB este echilateral.

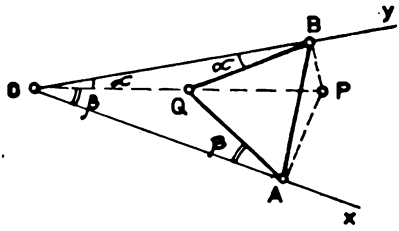
Soluție

Triunghiul PAO este dreptunghic, rezultă $AQ = \frac{OP}{2}$

Analog $BQ = \frac{OP}{2}$

Deci $AQ = BQ$

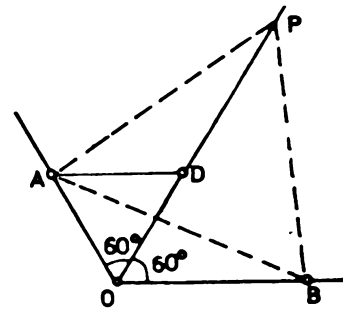
Fie $\sphericalangle QOA = \sphericalangle OAQ = \beta$
$\sphericalangle QOB = \sphericalangle QBO = \alpha$
Avem $\sphericalangle BQP = 2\alpha$ (unghi exterior ΔQOB)
$\sphericalangle PQA = 2\beta$ (unghi exterior triunghiului QOA)
Deci $\sphericalangle BQA = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$.
$= 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$
Triunghiul BQA având unghiul $B = 60^\circ$
şi $BQ = QA$ este echilateral.



20. Fie unghiul POB având măsura de 120° iar P un punct pe bisectoarea unghiului AOB încît
$OP = OA + OB$. Să se arate că triunghiul PAB este echilateral.

P. Răducanu

Soluţia 1
Fie $D \in (OP)$ încît $OD = OA$
Rezultă $DP = OB$
Triunghiul AOD este evident echilateral
Rezultă $AD = OA$
Deasemenea rezultă $\sphericalangle ADP = 120^\circ$
Triunghiurile ADP şi AOB sînt congruente
($AD = OA$, $DP = OP$ şi
$\sphericalangle ADP = \sphericalangle AOB = 120^\circ$)
Urmează $PA = AB$
Analog considerînd un punct $E \in (OP)$ încît
$OE = OB$ rezultă $PB = AB$
Prin urmare triunghiul PAB este echilateral.



Soluţia a 2-a
Fie $OA = x$, $OB = y$, deci $OP = x + y$
Teorema cosinusului aplicată în triunghiul AOP ne dă:
(1) $PA^2 = x^2 + (x + y)^2 - x(x + y) =$
$= x^2 + y^2 + xy$
Analog din triunghiul POP
(2) $PB^2 = x^2 + y^2 + xy$
Din triunghiul AOB avem
(3) $AB^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ = x^2 + y^2 + xy$
Din (1), (2), (3) urmează că triunghiul PAB echilateral.

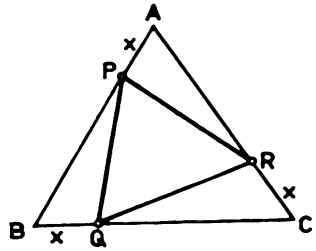
21. Pe laturile unui triunghi echilateral se consideră $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CA)$ încît $(AP) \equiv (BQ) \equiv (CR)$.
Să se arate că:
$4\sigma[PQR] \geq \sigma[ABC]$

Admitere - Facultatea de matematică 1982

Soluţie
Putem considera fără a restrînge generalitatea că AB are lungimea egală cu unitatea.
Rezultă $PB = QC = RA = 1 - x$,
unde $x = PA$

Avem: $\sigma[PAR] = \sigma[BQP] = \sigma[CRQ]$

Dar: $\frac{\sigma[APR]}{\sigma[ABC]} = \frac{AP \cdot AR \cdot \sin A}{AB \cdot AC \cdot \sin A} = x(1 - x)$



Putem considera $x \in [0, \frac{1}{2}]$

Cum $x + (1 - x) = 1 =$ constant rezultă $x(l - x)$ este maxim cînd $x = l - x$

adică $x = \frac{1}{2}$

Deci $\sigma[APR] \leq \frac{1}{4}\sigma[ABC]$

Rezultă $\sigma[PQR] = \sigma[ABC] - 3\sigma[APR] \geq$

$\geq \sigma[ABC] - \frac{3}{4}\sigma[ABC] = \frac{1}{4}\sigma[ABC]$

Egalitatea are loc cînd P, Q, R sînt mijloace de laturi.

22. Fie ABC un triunghi echilateral, iar M mijlocul laturii BC. Se consideră pe AB şi AC punctele P, Q astfel încît $BP = AQ$. Să se arate că :
$4\,\sigma[PMQ] \geq \sigma[ABC]$

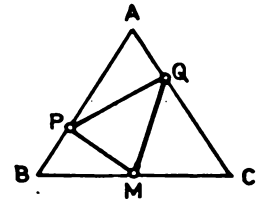
C. Cocea

Soluţie

Putem considera latura triunghiului egală cu unitatea.

Notăm $PB = AQ = x$; atunci $AP = CQ = 1 - x$

Avem:



$\sigma[APQ] + \sigma[BPM] + \sigma[MCQ] = \frac{1}{2}(AP \cdot AQ \sin 60° +$

$+ BP \cdot BM \sin 60° + MC \cdot CM \sin 60°) =$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}[x(1 - x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{x}{2}] =$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}[x(1 - x) + \frac{1}{2}]$

Dar $x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$ rezultă că:

(1) $\sigma[APQ] + \sigma[BPM] + \sigma[MCQ] \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}$

Cum $\sigma[ABC] = \frac{\sqrt{3}}{4}$ rezultă avînd în vedere (1) că:

$$\sigma[PMQ] \geq \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

Atunci:

$$\sigma[PMQ] \geq \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}\sigma[ABC]$$

şi astfel inegalitatea a fost dovedită.

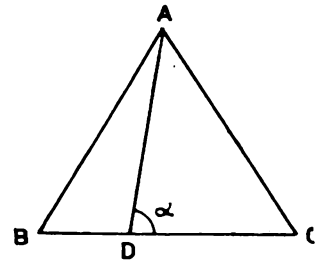
23. Fie ABC un triunghi echilateral şi $D \in (BC)$. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor ABD şi ADC sînt congruente. Aceeaşi problemă dacă triunghiul este isoscel
(AB = AC).

Soluţie

Notăm R_1, R_2 razele celor două cercuri
Avem:

$$R_1 = \frac{AB \cdot AD \cdot BD}{4\sigma[ABD]}$$

$$R_2 = \frac{AC \cdot AD \cdot DC}{4\sigma[ADC]}$$



Fie $\alpha = \sphericalangle ADC$
Avem: $\sigma[ABD] = AD \cdot BD \cdot \sin(180° - \alpha)$ şi
$\sigma[ADC] = AD \cdot DC \cdot \sin\alpha$
Deci:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{AB \cdot AD \cdot BD}{AC \cdot AD \cdot DC} \cdot \frac{AD \cdot DC \sin(180° - \alpha)}{AD \cdot BD \sin\alpha} = 1$$

Se observă că în demonstraţie s-a utilizat numai faptul că ΔABC este isoscel ($AB = AC$).

24. Două triunghiuri echilaterale ABC şi ABD cu o latură comună; se duce prin punctul D o secantă care taie laturile CA şi CB în F şi E. Se cere locul geometric al punctului de intersecţie al dreptelor AE şi BF.

Soluţie

Din figură rezultă:

$$\frac{DE}{DF} = \frac{BE}{BC} = \frac{AC}{AF} \text{ şi deci } \frac{BE}{AB} = \frac{AB}{AF}$$

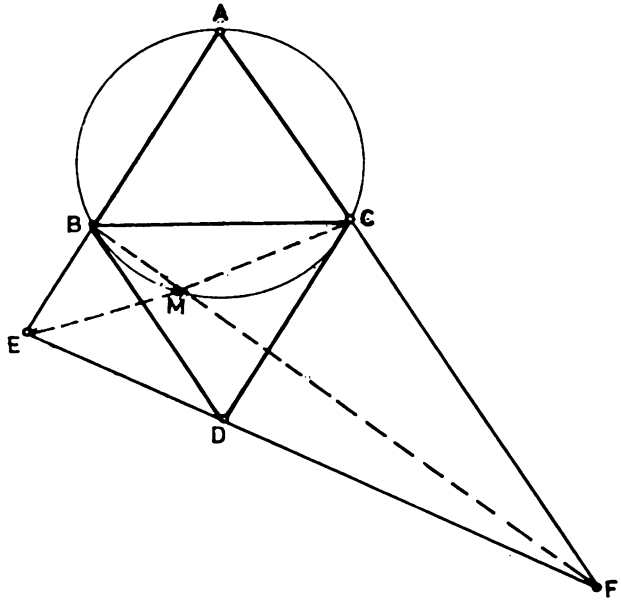
Dar $\Delta BAE \sim \Delta ABF$ avînd un unghi egal cuprins între laturi proporţionale;
Rezultă $\sphericalangle ABF = \sphericalangle AEB$ şi deci $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ABE$
Cum $\sphericalangle ABE = 120°$, rezultă că M se află pe cercul circumscris triunghiului ABC.

25. Fie ABC un triunghi echilateral înscris în cercul $b(O, R)$ iar $M \in BC$. Să se arate că
$MA = MB + MC$

Teorema Van Schooten

Soluţia 1

Fie a lungimea laturii triunghiului echilateral. Teorema lui Ptolemeu aplicată patrulaterului inscriptibil $ABMC$ ne dă:
$MA \cdot BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB$ sau:
$MA \cdot a = MB \cdot a + MC \cdot a$, de unde:
$MA = MB + MC$



Soluția 2

Fie $P \in (AM)$ încît $PM = BM$

Cum $\sphericalangle BMP = 60°$ triunghiul BMP este echilateral

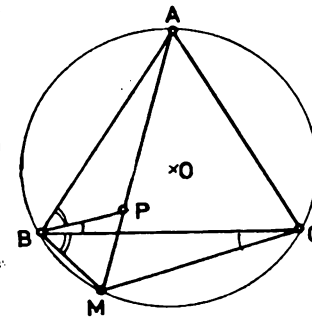
Avem $\left.\begin{array}{l} \sphericalangle ABP = 60° - \sphericalangle PBC \\ \sphericalangle MBC = 60° - \sphericalangle PBC \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\sphericalangle ABP = \sphericalangle MBC$

Triunghiurile ABP și BCM sînt congruente ($AB = BC$, $\sphericalangle ABP = \sphericalangle MBC$, BM latură comună)

Rezultă $MC = PA$

Prin urmare $MB + MC = MP + PA = MA$ ceea ce încheie demonstrația.



26. Dacă există două puncte diferite M_1 și M_2 pe arcul BC care nu conține punctul A al cercului circumscris triunghiului ABC așa încît $M_iA = M_iB + M_iC$ ($i = 1, 2$), atunci triunghiul ABC este echilateral.

Victor Marinescu

Soluție

Notăm $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$

Presupunem ($b \neq a$) (cazul $b = a$ este banal)

Scriem teorema lui Ptolemeu în ABM_1C şi ABM_2C
Avem:

(1) $M_1A \cdot a = M_1B \cdot b + M_1C \cdot c$

(2) $M_2A \cdot a = M_2B \cdot b + M_2C \cdot c$

Sau:

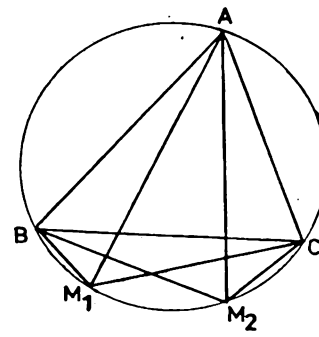
(3) $(M_1B + M_1C)a = M_1B \cdot b + M_1C \cdot c$

(4) $(M_2B + M_2C)a = M_2B \cdot b + M_2C \cdot c$

De unde

(5) $\dfrac{M_1B}{M_1C} = \dfrac{c - a}{a - b}$

(6) $\dfrac{M_2B}{M_2C} = \dfrac{c - a}{a - b}$



Notăm $\dfrac{c - a}{a - b} = K$

Pe segmentul BC există două puncte P, Q încît

$\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{QB}{QC} = K$

Locul geometric al punctelor pentru care raportul distanţelor la B şi C este egal cu K este cercul Appollonius (de diametru PQ). Acest cerc intersectează arcul mic BC într-un singur punct. Cum datorită relaţiilor (5) şi (6) M_1, M_2 se găsesc pe acest cerc Appollonius urmează $M_1 \equiv M_2$, contradicţie. Prin urmare $a = b$

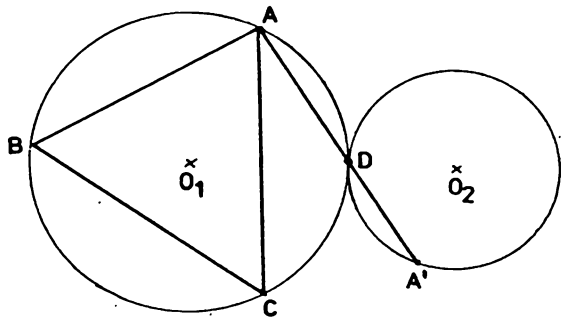
Relaţia (3) se poate scrie:

(7) $(M_1B + M_1C)a = M_1B \cdot a + M_1C \cdot c$;

de unde $a = c$

Deci triunghiul ABC este echilateral.

27. Fie două cercuri $\mathcal{C}(O_1, R_1)$ şi $\mathcal{C}(O_2, R_2)$ tangente între ele. În cercul mare este înscris un triunghi echilateral din vîrfurile căruia sînt duse tangente la cercul mai mic. Arătaţi că una din tangente este egală cu suma celorlalte două.



Soluție Presupunem că $R_1 > R_2$. Fie notațiile ca în figură. Cercul $\mathcal{C}(O_2)$ se va obține din $\mathcal{C}(O_1)$ printr-o omotetie de raport $\pm \frac{R_2}{R_1}$ după cum cercurile sînt tangente exterior sau interior.

$$AA' = AD \pm DA' = AD\left(1 \pm \frac{R_2}{R_1}\right)$$

Dacă t_a este lungimea tangentei din A

$$t_a = \sqrt{AD \cdot AA'} = AD\sqrt{1 \pm \frac{R_2}{R_1}}$$

A n a l o g

$$t_b = BD\sqrt{1 \pm \frac{R_2}{R_1}}; t_c = CD\sqrt{1 \pm \frac{R_2}{R_1}}$$

cum $D \in \overline{AB}$ și ABC este echilateral avem:

$$BD = AD + CD, \text{ adică } t_b = t_a + t_c$$

28. Picioarele perpendicularelor dintr-un punct M pe înălțimile unui triunghi echilateral formează un triunghi echilateral.

Soluție

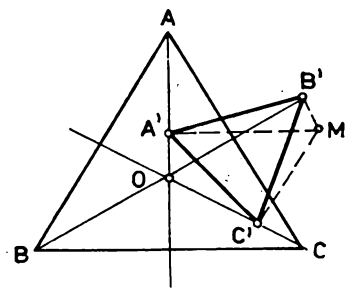
Avem patrulaterele inscriptibile $OC'MB'$, $OA'B'M$ și $A'OC'M$ înscrise în cercul de diametru OM

Avem: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COA = 120°$

$\sphericalangle C'OA' = 120° \Rightarrow \sphericalangle A'B'C' = 60°$

În același mod $\sphericalangle C'A'B' = \sphericalangle A'C'B' = 60°$

Deci triunghiul este echilateral.



29 Se dă triunghiul echilateral ABC și se ia un punct M pe BC. Paralelele duse prin M la laturile triunghiului întîlnesc pe AB și AC respectiv în D și E.

Fie L și Q mijloacele segmentelor CD și BE. Să se arate că triunghiul MQL este echilateral.

Soluție

Din congruența triunghiurilor BEC și CDA

(cazul L.U.L.) rezultă $BE = DC$.

Triunghiurile BEM și DCM sînt congruente

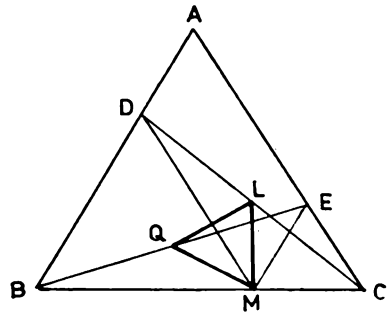
(1) $BM = DM$ (DBM echilateral)

(2) $ME = MC$ (MEC echilateral)

(3) $\sphericalangle BNE = \sphericalangle DMC = 120°$

Rezultă că medianele corespunzătoare lui BE și CD sînt congruente adică

(4) $MQ = ML$
Dar $\Delta BMQ \equiv \Delta DLM$ (cazul L.L.L.)
Rezultă (5) $\sphericalangle BMQ = \sphericalangle DML$
Ţinînd seama de (5) avem
$\sphericalangle QLM = \sphericalangle QMD + \sphericalangle DML =$
$= \sphericalangle QMD + \sphericalangle BMQ = 60°$
Cum triunghiul isoscel MQL are un unghi de 60° rezultă că este echilateral.



30. Fie A,B,C vîrfurile unui triunghi oarecare. Notăm cu N, M vîrfurile triunghiurilor echilaterale construite spre exterior pe laturile AB respectiv AC. Fie S, T, P respectiv mijloacele segmentelor AN, AM, BC. Să se arate că triunghiul PST este echilateral.

C. Ottescu

Soluţie

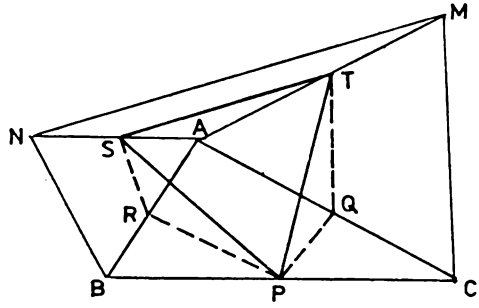
Fie R, Q mijloacele segmentelor AB şi AC. Avem

$$PQ = \frac{AB}{2}, \; SR = \frac{BN}{2} = \frac{AB}{2}$$

$$SA = AR = \frac{AB}{2}, \; PR = \frac{AC}{2},$$

$$AQ = \frac{CM}{2} = \frac{AC}{2}$$

Apoi $\sphericalangle SRP = 60° + \sphericalangle ARP = 60° + 180° - A = 240° - A$
La fel $\sphericalangle TQP = 240° - A$ şi
$\sphericalangle SAT = 360° - 60° - 60° - A =$
$= 240° - A$
Avem $\Delta SRP \equiv \Delta PQT \equiv \Delta SAT$ deoarece din relaţiile de mai sus avem:



(1) $SR = PQ = SA = \frac{AB}{2}$

(2) $PR = TQ = AT = \frac{AC}{2}$

(3) $\sphericalangle SRP = \sphericalangle PQT = \sphericalangle SAT = 240° - A$

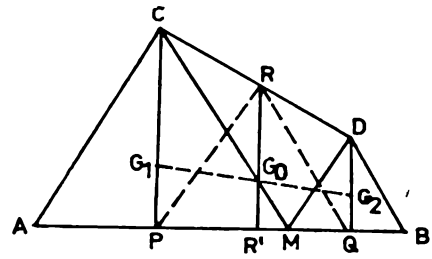
Rezultă $SP = PT = ST$ deci ΔSPT este echilateral.

31. Fie M un punct variabil pe segmentul AB. De aceeaşi parte a dreptei AB construim triunghiurile echilaterale AMC şi BMD. Notăm cu P, Q respectiv R mijloacele segmentelor AM, MB, CD. Să se arate că :
a) Triunghiul PQR este echilateral ;
b) Dacă G_1, G_2, G_o sînt centrele de greutate ale triunghiurilor echilaterale AMC, BMD şi PQR, atunci punctele G_1, G_o, G_2 sînt coliniare.

Soluţie

a) Avem $AMDC$ trapez ($MD \parallel AC$), PR linie mijlocie deci

$$PR = \frac{AC + MD}{2} = \frac{AM + MB}{2} = \frac{AB}{2}$$



La fel RQ linie mijlocie în trapezul $CMBD$ şi rezultă analog

$$RQ = \frac{AB}{2}$$

Dar $PQ = PM + MQ = \frac{AM}{2} + \frac{MB}{2} = \frac{AB}{2}$

Deci $PQ = PR = RQ = \frac{AB}{2}$ prin urmare PRQ este triunghi echilateral

b) Fie R' proiecţia lui R pe AB.

Cum $PR = \frac{AC + MD}{2}$ rezultă prin înmulţire cu $\frac{\sqrt{3}}{2}$ că

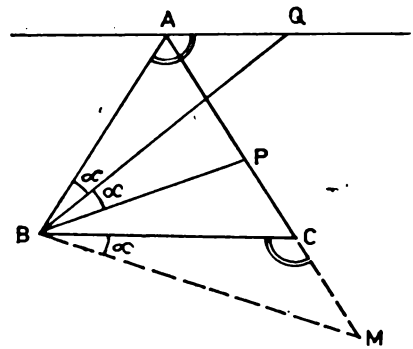
$RR' = \frac{CP + DQ}{2}$ de unde:

$G_0R' = \frac{G_1P + G_2Q}{2}$ deci G_0R' este cît linia mijlocie a trapezului G_1PQG_2, deci G_1, G_0, G_2 sînt coliniare.

32. Fie ABC un triunghi echilateral iar P un punct pe latura (AC). Bisectoarea unghiului ABP taie paralela prin A la BC în Q.

Să se arate că $BP = CP + AQ$

C. Cocea



Soluţie

Fie pe prelungirea lui AC punctul M încît $CM = AQ$. Avem

$\sphericalangle BAQ = \sphericalangle BCM = 120°$

Rezultă $\Delta ABQ \equiv \Delta BCM$ ($AB = AC$, $AQ = CM$, $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle BCM = 120°$)

Fie $\sphericalangle PBQ = \sphericalangle QBA = \alpha$

Avem $\sphericalangle CBM = \alpha$. Vom arăta că triunghiul BPM este isoscel. Avem:

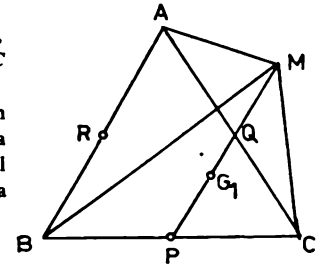
$\sphericalangle PBM = \sphericalangle PBC + \sphericalangle CBM = (60° - 2\alpha) + \alpha = 60° - \alpha$

$\sphericalangle BMP = \sphericalangle PCB - \sphericalangle CBM = 60° - \alpha$. Triunghiul BPM fiind isoscel rezultă $BP = PM = PC + CM = PC + AQ$, ceea ce trebuie demonstrat.

33. Fie M un punct în planul triunghiului echilateral ABC. Să se arate că centrele de greutate ale triunghiurilor MBC, MCA, MAB formează un triunghi echilateral.

Soluție

Fie P, Q, R mijloacele lui BC, CA, AB, iar G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor MBC MCA respectiv MAB. Fie omotetia $O(M, 2/3)$
Avem $G_1 = O(P)$, $G_2 = O(Q)$, $G_3 = O(R)$. Prin urmare $G_1\ G_2\ G_3$ este transformatul prin omotetia de centru M și raport 2/3 a triunghiului echilateral PQR, deci $G_1\ G_2\ G_3$ este echilateral (omotetia păstrează asemănarea figurilor)

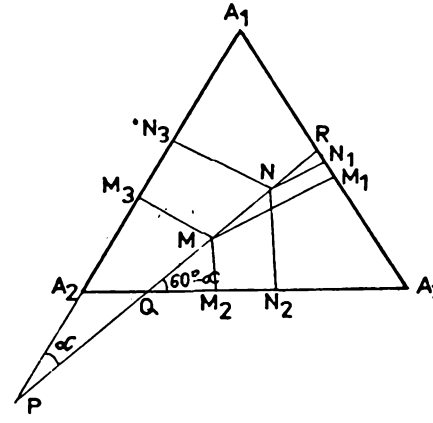


34. Fie MN un segment în planul triunghiului echilateral $A_1A_2A_3$. Să se arate că există o latură a triunghiului încît proiecția pe ea a lui MN să fie egală cu suma proiecțiilor lui MN pe celelalte două laturi.

C. Cocea

Soluție

Fie notațiile ca în figură. Notăm
$\sphericalangle A_1PR = \alpha$
Avem $\sphericalangle RQA_3 = 60° - \alpha$,
iar $\sphericalangle QRA_3 = 180° -$
$- (60° - \alpha + 60°) =$
$= 60° + \alpha$
Avem:
(1) $M_1N_1 = MN \cdot \cos(60° + \alpha) =$
$= MN\,(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha)$
(2) $M_2N_2 = MN\cos(60° - \alpha) =$
$= MN\,(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha)$
(3) $M_3N_3 = MN\cos\alpha$
Din (1), (2) și (3) se observă că
$M_3N_3 = M_1N_1 + M_2N_2$
Dacă unghiul $\sphericalangle PRA_3$ este obtuz (caz în care $\alpha < 30°$) Atunci:
$M_1N_1 = MN\cos\sphericalangle PRA_1 =$
$= MN\cos(180° - 60° - \alpha)$
Deci:



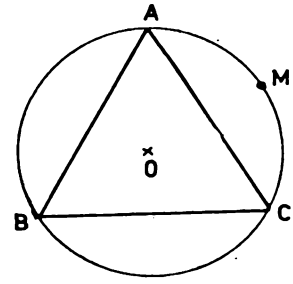
(4) $M_1N_1 = MN\cos(120° - \alpha) = MN\,(-\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha)$
Atunci din (1), (2) și (4) rezultă $M_2N_2 = M_1N_1 + M_3N_3$

35. Fie ABC un triunghi echilateral înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$, iar $M \in \mathcal{C}$
Să se arate că :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \text{constant}$$

Soluţie

Fie ABC un triunghi oarecare, G centrul de greutate al său, iar M în planul triunghiului.



Avem (1) $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$

Dar: $\vec{MA} = \vec{MG} + \vec{GA}$

(2) $\vec{MB} = \vec{MG} + \vec{GB}$

$\vec{MC} = \vec{MG} + \vec{GC}$

Efectuînd pătratul scalar şi sumînd obţinem:

$MA^2 + MB^2 + MC^2 =$

$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\vec{MG}\ (\vec{GA} +$

$+ \vec{GB} + \vec{GC}\ )$

Avînd în vedere (1) obţinem

(3) $MA^2 + MB^2 + MC^2 =$

$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

care este aşa numita relaţie a lui Leibniz.

În cazul triunghiului echilateral $G \equiv 0$, deci din (3) rezultă

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$$

36. Fie ABC un triunghi înscris în cercul $C(O, R)$. Dacă există trei puncte distincte $M_i \in C(i = 1, 3)$ astfel ca sumele $M_iA^2 + M_iB^2 + M_iC^2$ $(i = 1, 3)$ să aibă aceeaşi valoare, atunci triunghiul ABC este echilateral.

C. Cocea

Soluţie

Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Aplicînd relaţia lui Leibniz pentru M_1, M_2, M_3 obţinem:

(1) $M_1A^2 + M_1B^2 + M_1C^2 = 3M_1G^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

(2) $M_2A^2 + M_2B^2 + M_2C^2 = 3M_2G^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

(3) $M_3A^2 + M_3B^2 + M3C^2 = 3M_3G^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

Conform enunţului rezultă că

$GM_1 = GM_2 = GM_3$, deci M_1, M_2, M_3 se găsesc pe un cerc cu centrul în G, prin urmare $G \equiv O$. Aşadar ABC este echilateral.

37. Fie un triunghi echilateral înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$ iar $M \in \mathcal{C}$ oarecare.
Să se arate că :

$$MA^4 + MB^4 + MC^4 = \text{constant}$$

Soluţia 1

Notăm $l = AB$. Dacă M este unul din vîrfurile triunghiului echilateral, avem $\sum MA^4 = 2 \cdot l^4$ şi deci valoarea constantei trebuie să fie $2 \cdot l^4$. Fie M pe arcul mic $\overset{\frown}{BC}$. Se ştie că $MA = MB + MC$ şi din teorema cosinusului aplicată în triunghiul MBC

$(\sphericalangle BMC = 120°)$

$l^2 = MB^2 + MC^2 + MB \cdot MC$

Avem:

$MA^4 + MB^4 + MC^4 =$

$= (MB + MC)^4 + MB^4 + MC^4 =$

$= (MB^2 + MC^2 + 2MB \cdot MC)^2 +$

$+ MB^4 + MC^4 = (l^2 + MB \cdot MC)^2 +$

$MB^4 + MC^4 = l^4 + MB^4 + MC^4 +$

$MB^2 \cdot MC^2 + 2l^2 \cdot MB \cdot MC = l^4 +$

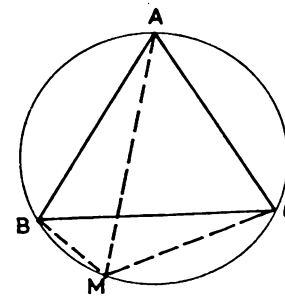
$+ (MB^2 + MC^2 + MB \cdot MC)^2 -$

$- 2MB^2 \cdot MC^2 - 2MB^3 \cdot MC$

$- 2MB \cdot MC^3 + 2l^2 MB \cdot MC =$

$= 2l^4 - 2MB \cdot MC(MB^2 + MC^2 +$

$+ MB \cdot MC - l^2) = 2l^4$



Soluția a 2 - a (trigonometrică)

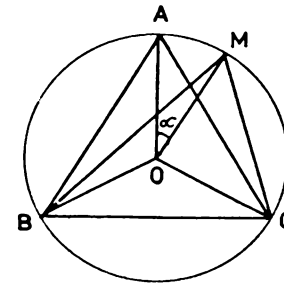
Fie $M \in \overset{\frown}{AC}$ iar $\alpha = \sphericalangle AOM$

Avem:

$(\Delta OAN)\ AM = 2R \sin\frac{\alpha}{2}$

$(\Delta OBM)\ BM = 2R \cdot \sin(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{3})$

$(\Delta OCM)\ CM = 2R \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2})$



Putem scrie:

$\sin^4\frac{\alpha}{2} + \sin^4(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}) + \sin^4(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}) =$

$= \sin^4\frac{\alpha}{2} + \sin^4(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}) + \sin^4(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}) =$

$= \sin^4\frac{\alpha}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2})^4 + (\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2})^4 =$

$= \sin^4\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{8}(9\cos^4\frac{\alpha}{2} + 18\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^4\frac{\alpha}{2}) =$

$= \frac{9}{8}(\cos^4\frac{\alpha}{2} + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^4\frac{\alpha}{2}) = \frac{9}{8}(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2})^2 = \frac{9}{8}$

Deci $\sum MA^4 = (2R)^4 \cdot \frac{9}{8} = 18R^4$

38. Fie ABC un triunghi echilateral şi P un punct situat pe cercul său circumscris. Să se determine toate numerele $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care suma $S_n(P) = PA^n + PB^n + PC^n$ nu depinde de alegerea punctului P.

Dorinel Anca

Soluţie

Fie z_a, z_b, z_c, z afixele punctelor A, B, C, P; avem $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z| = 1$. Prin urmare z_A, z_B, z_C, sînt rădăcinile ecuaţiei $z^3=1$ iar $z = a + ib$ cu $a^2 + b^2 = 1$.

Deci $z_A = 1$, $z_B = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_C = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Avem:

(*) $S_n(P) = |z - z_A|^n + |z - z_B|^n + |z - z_C|^n$

Dar:

$$|z - z_A| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1-a}$$

$$|z - z_B| = \sqrt{2 + a - b\sqrt{3}}$$

Atunci: $|z - z_C| = 2 + \sqrt{a + b\sqrt{3}}$

(**) $S_n(P) = 2^{n/2}(1 - a)^{n/2}$

$+ (2 + a + b\sqrt{3})^{n/2} + (2 + a + b\sqrt{3})^{n/2}$

Dacă P coincide cu A

$$S_n(A) = 3^{n/2} + 3^{n/2} = 2 \cdot 3^{n/2}$$

Dacă P_1 are coordonatele $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

atunci $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, deci

$a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi din (**) obţinem:

$S_n(P_1) = 2^{n/2} \cdot 2^{-n/2} + (2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2})^{n/2} + (2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2})^{n/2} = 2 + 2^n$

Cum $S_n(A) = S_n(P_1) \Rightarrow 2 \cdot 3^{n/2} = 2 + 2^n$ (**)

Ridicînd la pătrat se obţine imediat:

$4^n + 2^{n+1} + 4 = 4 \cdot 3^n$ sau:

$4^{n-1} + 2^{n-2} + 1 = 3^n$

Or se poate demonstra imediat că pentru $n > 4$, $4^{n-1} > 3^n$ Prin urmare $n \in \{1, 2, 3, 4\}$

Dar din (***) rezultă că n trebuie să fie par, deci $n = 2$ sau $n = 4$. Pentru $n = 2$ şi $n = 4$ problema este adevărată în conformitate cu problemele 35 şi 37.

39. Două triunghiuri echilaterale ABC şi $A'B'C'$ sînt înscrise în două cercuri concentrice. Fie P un punct pe cercul ABC iar P' un punct pe cercul $A'B'C'$. Să se arate că :

$PA'^2 + PB'^2 + PC'^2 = P'A^2 + P'B^2 + P'C^2$

Soluţie

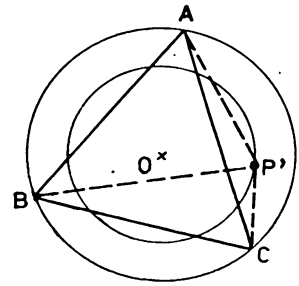
Fie R şi r razele celor două cercuri.

Conform relaţiei lui Leibniz avem:

$P'A^2 + P'B^2 + P'C^2 = 3P'O^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 =$

$= 3R^2 + 3r^2$

Analog se arată că
$PA'^2 + PB'^2 + PC'^2 = 3R^2 + 3r^2$



40. Fie ABC şi DBC două triunghiuri echilaterale, simetrice în raport cu BC, P un punct pe cercul descris din D ca diametru cu DB rază. Să se arate că PA, PB, PC sînt laturile unui triunghi dreptunghic.

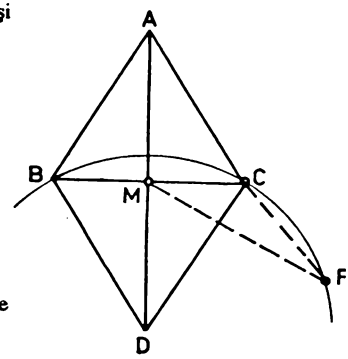
Soluţie

Fie M mijlocul lui BC.

Aplicăm formula medianei în triunghiurile PBC şi PAD, avem:

$$(1)\quad PM^2 = \frac{2(PB^2 + PC^2) - BC^2}{4}$$

$$(2)\quad PM^2 = \frac{2(PA^2 + PD^2) - AD^2}{4}$$



Fie l latura triunghiului

Avem $BC = l$, $PD = l$, $AD = l\sqrt{3}$

Din (1) şi (2) rezultă:

(2) $2(PB^2 + PC^2) - l^2 = 2(PA^2 + l^2) - 3l^2$ de unde:

$PA^2 = PB^2 + PC^2$

41. Fie ABC şi BCD două triunghiuri echilaterale. Pe cercul circumscris triunghiului BCD, în interiorul triunghiului ABC se ia un punct P. Să se demonstreze că

$$PD^2 - PA^2 = 3BP \cdot CP$$

Gh. Eckstein

Soluţie

Cu notaţiile din figură avem:

$PD^2 - PA^2 = MD^2 - MA^2 =$

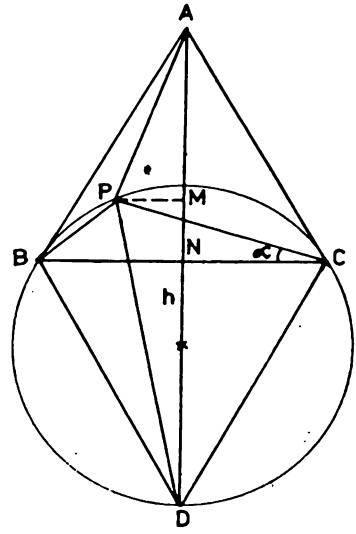
$= (MD - MA)(MD + MA) =$

$= AD[(h + MN) - (h - MN)] = 2AD \cdot MN = 2l\sqrt{3}MN = 2\sqrt{3}BC \cdot MN =$

$= 4\sqrt{3}\,\sigma[PBC] =$

$4\sqrt{3}\,\frac{PB\cdot PC\,\sin 120^\circ}{2} = 4\sqrt{3}\,\frac{PB\cdot PC\sqrt{3}}{4} =$

$= 3\,PB\cdot PC$



42. Fie ABC şi DBC două triunghiuri echilaterale de latură a simetrice faţă de BC şi P un punct pe cercul circumscris triunghiului DBC. Arătaţi că $PA^2 - 2PB\cdot PC = a^2$ sau $PA^2 + 2PB\cdot PC = a^2$, după poziţia punctului P pe cercul DBC.

E. Rogai

Soluţie

Presupunem că P se află pe arcul $\overset{\frown}{BC}$, pe care nu se află D. Fie M mijlocul lui BC. Formula medianei în triunghiul BPC furnizează relaţia:

(1) $4\,PM^2 = 2(PB^2 + PC^2) - a^2$

Aplicînd formula medianei în triunghiul PAD obţinem

(2) $4\,PM^2 = 2(PA^2 + PD^2) - 3a^2$

Din (1) şi (2) rezultă

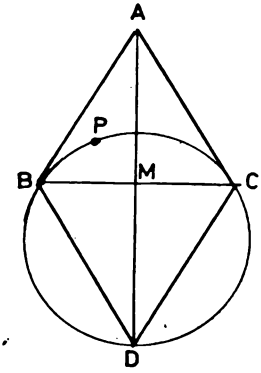
(3) $PA^2 = PB^2 + PC^2 - PD^2 + a^2$

Dar se ştie că $PD = PB + PC$, urmează că:

(4) $PA^2 = PB^2 + PC^2 - PB^2 - PC^2 - 2PB\cdot PC + a^2$

adică: (5) $PB^2 + 2PB\cdot PC = a^2$

Cazurile cînd $P \in (BD)$ sau $P \in (DC)$ se tratează analog şi furnizează cea de-a doua relaţie.



43. a) Dintre toate triunghiurile înscrise în acelaşi cerc perimetrul maxim este atins de triunghiul echilateral.

b) Dintre toate triunghiurile înscrise în acelaşi cerc, triunghiul echilateral are aria maximă.

Soluţie

a) Se ştie că $OG^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$

Deci (1) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$ cu egalitate cînd $O \equiv G$ deci triunghiul ABC este echilateral. Avem: $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \leq 27R^2$

de unde $a + b + c \leq 3\sqrt{3}R$ ca egalitate cînd triunghiul este echilateral.

b) 1. Avem:

(2) $9R^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$

cu egalitate cînd $a = b = c$

(ultima inegalitate aparţine lui Gordon şi a făcut obiectul unei probleme date la O.I.M. 1961)

Deci $S \leq \dfrac{9R^2}{4\sqrt{3}}$ cu egalitate cînd triunghiul este echilateral.

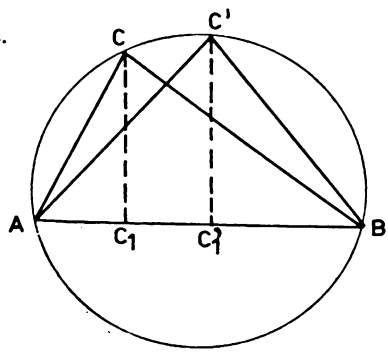
2. Se poate da o soluţie şi în modul următor:

$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$

Cum $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ (egalitate cînd $A = B = C = 60°$)

Rezultă $S \leq \dfrac{9R^2}{4\sqrt{3}}$ cu egalitate cînd triunghiul este echilateral.

3. Punctul b) se poate demonstra şi geometric.



Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathcal{C}(O; R)$. Cînd C se mişcă pe arcul $\overset{\frown}{AB}$ aria maximă se obţine pentru poziţia cînd $C \equiv C'$ - mijlocul arcului $\overset{\frown}{AB}$, deci cînd CAB devine isoscel(deoarece triunghiurile ABC şi ABC' au aceeaşi bază iar înălţimile CC_1 şi $C'C_1'$ cu $CC_1 < C'C_1'$)

Analog aria lui $AC'B$ se măreşte cînd $AC'B$ devine isoscel de bază $C'B$, deci echilateral.

44. a) Dintre toate triunghiurile de perimetru dat, triunghiul echilateral are aria maximă.

b) Dintre toate triunghiurile de arie dată perimetrul minim îl are triunghiul echilateral.

Soluție

Fie a, b, c laturile unui triunghi ABC. Conform inegalității mediilor avem:

$$(1)\quad \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{S^2}{p}}$$

cu egalitate cînd $a = b = c$

sau

$$(2)\quad \frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{S^2}{p}}$$

de unde

$$(3)\quad p^4 \geq 27\,S^2$$

a) Dacă S este dat p este minim cînd $p^4 = 27\,S^2$, adică $a = b = c$

b) Dacă p este dat din (3) rezultă S maxim cînd $p^4 = 27\,S^2$, adică $a = b = c$

45. Să se arate că dintre toate triunghiurile circumscrise unui cerc dat triunghiul echilateral are perimetrul minim și aria minimă.

Soluție

Fie ABC un triunghi circumscris cercului dat iar a, b, c laturile sale.

Avem

$$(1)\quad r^2 = \frac{S^2}{p^2} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$$

Dar conform inegalității mediilor avem:

$$(2)\quad (p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27}$$

Cu egalitate cînd $a = b = c$

Din (1) și (2) rezultă: $r^2 \leq \frac{p^2}{27}$ sau:

$$(3)\quad 3\sqrt{3}r \leq p$$ (cu egalitate cînd $a = b = c$)

Din (3) rezultă afirmația din enunț.

Înmulțind inegalitatea din enunț cu p obținem

$$(4)\quad 3\sqrt{3}\,\sigma[ABC] \leq p^2$$

Deci și aria este minimă cînd triunghiul ABC este echilateral.

46. Fie M un punct în interiorul unui triunghi echilateral. Să se arate că mijloacele segmentelor paralele cu laturile triunghiului duse prin M, mărginite de laturile acestuia, formează un triunghi echilateral.

C. Cocea și D. Geba

Soluție

Considerăm notațiile ca în figura de mai jos. Deoarece triunghiul ABC este echilateral și $B_1C_2 \parallel BC \Rightarrow \Delta AB_1C_2$ echilateral și cum N este mijlocul lui B_1C_2 rezultă

$AN \perp B_1C_2 \Rightarrow AN \perp MN$

$\left.\begin{array}{l} AN \perp B_1C_2 \\ B_1C_2 \parallel BC \end{array}\right\} \Rightarrow AN \perp BC$

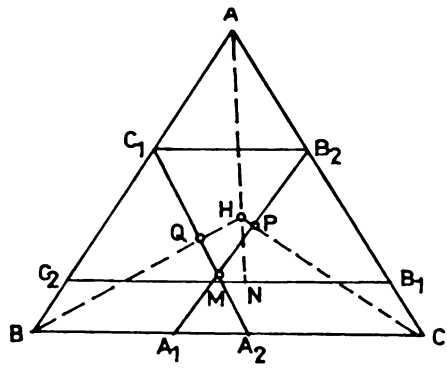
Analog $BQ \perp CA$ și $CP \perp AB \Rightarrow$

$AN \cap BQ \cap CP = \{H\}$ ortocentrul triunghiului ABC

$\left.\begin{array}{l} H \in AN \\ AN \perp MN \end{array}\right\} \Rightarrow HN \perp MN$. Analog $HQ \perp QM$ și $HP \perp PM$

Prin urmare M, N, P, Q, H sînt pe cercul de

diametru HM (1)
Dar ΔABC echilateral, H ortocentru $\Rightarrow H \equiv O \Rightarrow$



$\sphericalangle BHC = 120°$, şi $\sphericalangle QHP = 120°$
$Q, P \in \mathcal{D}(d = HM)$
Rezultă $QP = MH \sin 120° = MH\frac{\sqrt{3}}{2}$. Analog $\sphericalangle NHP = 60° \Rightarrow$ conform (1)

$NP = MH \sin 60° = MH\frac{\sqrt{3}}{2}$

Cum $\sphericalangle QMN = 120° \Rightarrow$ conform (1) $QN = MH \cdot \sin 120° = MH\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Deci $QP = NP = QN$ adică ΔQNP este echilateral, unde Q, N, P sînt mijloacele segmentelor A_2C_1, B_1C_2 şi A_1B_2

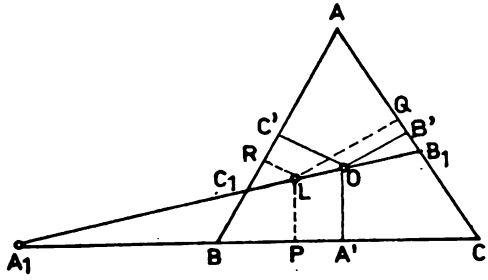
c.c.t.d.

Observaţie Cînd P se mişcă pe un cerc cu centrul în H, triunghiul PNQ are aria constantă.

47. Fie un triunghi echilateral iar O centrul său. O dreaptă care trece prin O intersectează BC, AC, AB în punctele A_1, B_1, C_1. Dacă L este un punct pe această dreaptă, interior triunghiului ABC, atunci:

$$\frac{A_1L}{A_1O} + \frac{B_1L}{B_1O} + \frac{C_1L}{C_1O} = 3$$

P. Răducanu



Soluţie

Fie A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului, iar P, Q, R proiecţiile punctului L pe laturile BC, CA respectiv AB. Notăm $LP = x$, $LQ = y$, $LR = z$

Fie h lungimea înălţimii triunghiului.

Avem:

$$OA' = OB' = OC' = \frac{h}{3}$$

Din asemănarea triunghiurilor A_1PL şi $A_1A'O$ rezultă:

$$\frac{A_1L}{A_1O} = \frac{LP}{OA'}$$

Deci (1) $\dfrac{A_1L}{A_1O} = \dfrac{x}{\frac{h}{3}} = \dfrac{3x}{h}$

Analog (2) $\dfrac{B_1L}{B_1O} = \dfrac{3y}{h}$; (3) $\dfrac{C_1L}{C_1L} = \dfrac{3z}{h}$

Din (1), (2) şi (3) rezultă că

$$\frac{A_1L}{A_1O} + \frac{B_1L}{B_1O} + \frac{C_1L}{C_1O} = \frac{3(x + y + z)}{h} = \frac{3h}{h} = 3,$$

deoarece suma distanţelor unui punct interior unui triunghi la laturile acestuia este constantă şi egală cu lungimea înălţimii triunghiului.

48. Se dă triunghi echilateral ABC şi un punct oarecare M pe AC. Fie N şi P proiecţiile punctului M pe BC şi AB, iar $\{R\} = NM \cap AB$, $\{Q\} = PM \cap AC$ şi $\{S\} = RQ \cap AC$.

Să se arate că punctele P, N, S sînt coliniare.

Ştefan Tifui

Soluţie

Din patrulaterul inscriptibil $BPMN$ ($\sphericalangle BPM = \sphericalangle BNP = 90°$) avem $\sphericalangle NPQ = \sphericalangle MBN = a$

Din patrulaterul inscriptibil $RPNQ$ avem: $\sphericalangle NPQ = \sphericalangle NRQ = a$

Deoarece $\sphericalangle RNQ = 90°$, pentru a arăta coliniaritatea punctelor P, N, S este suficient să arătăm că:

$\sphericalangle PNR + \sphericalangle QNS = 90°$ sau că

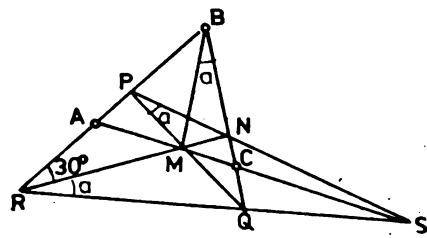
$\sphericalangle PNB = \sphericalangle QNS$

Avem: $\sphericalangle NPB = 90° - a$,

$\sphericalangle PBN = 60°$ şi atunci

$\sphericalangle PNB = 180° - (90° - a - 60°) =$

$= 30° + a$



În triunghiul NRQ, $\sphericalangle NQR = 90° - a$ şi deci $\sphericalangle NQS = 90° + a$. În triunghiul RPS avem $\sphericalangle PSR = 180° - (30° + a + 90° + a) = 60° - 2a$.

Din triunghiul SQN avem:

$\sphericalangle QNS = 180° - (90° + a + 60° - 2a) = 30° + a$

Prin urmare $\sphericalangle PNB = \sphericalangle QNS = 30° + a$, deci P, N, S sînt coliniare.

49. Fie $ABCD$ un pătrat iar $E \in (AC)$ astfel ca $\sphericalangle EBC = 30°$. Notăm cu F simetricul lui E față de punctul D. Să se arate că triunghiul BDF este echilateral.

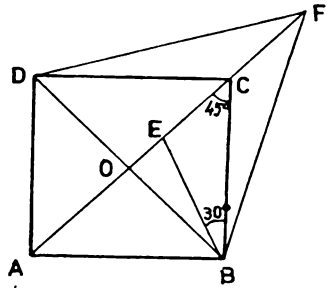
Soluție

Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Fie l lungimea laturii pătratului.

Este evident că triunghiul BDF este isoscel (de bază BD).

Avem $\sphericalangle CEB = 180° - (30° + 45°) = 105°$

Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul BEC avem:



$$(1)\ \frac{EC}{\sin 30°} = \frac{l}{\sin 105°} = \frac{l}{\sin 75°}$$

Cum $\sin 30° = \frac{1}{2}$ și $\sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ rezultă din (1) că:

$$EC = \frac{2l}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{l(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$$

Avem

$$OF = OC + CF = OC + EC =$$

$$= \frac{l\sqrt{2}}{2} + \frac{l(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2} = \frac{l\sqrt{6}}{2}$$

Dar $BD = l\sqrt{2}$. Urmează că

$OF = \frac{BD\sqrt{3}}{2}$, prin urmare triunghiul ABC este echilateral.

50. Fie ABC un triunghi echilateral și fie M un punct oarecare pe baza BC diferit de mijlocul lui BC. Perpendiculara în M pe BC taie paralela din A la BC în O. Cercul de centru O și raza OM intersectează segmentele AB și AC în punctele P și Q. Să se arate că patrulaterul $AOQP$ este inscriptibil.

V. Brînzănescu

Soluție

Ducem $PT \perp OA$ care mai taie cercul în N.

Deoarece $OA \parallel BC$ rezultă

$\sphericalangle TAP = \sphericalangle ABC = 60°$

Deoarece diametrul OA este perpendicular pe coarda PN rezultă că T este mijlocul lui PN.

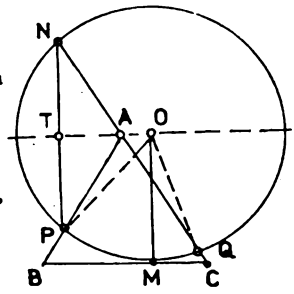
Atunci $\Delta APT \equiv \Delta ANT$ deci $\sphericalangle TAN = 60°$

Deoarece $OA \parallel BC$ rezultă

$\sphericalangle OAC = \sphericalangle ACB = 60°$

Avem: $\sphericalangle NAQ = 60° + 60° + 60° = 180°$ deci N, A, Q sînt coliniare.

Deoarece $\sphericalangle TNA = 30°$ și $\sphericalangle TNA = \widehat{PQ}/2$ rezultă $\widehat{PQ} = 60°$



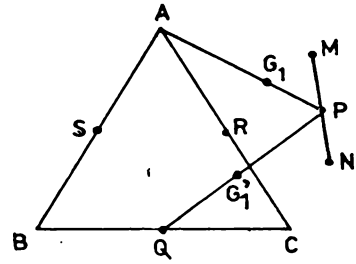
Atunci $\sphericalangle POQ = \widehat{PQ} = 60° = \sphericalangle PAQ$, deci $AOQP$ este patrulater inscriptibil.

51. Fie ABC un triunghi echilateral iar M, N două puncte în planul triunghiului. Notăm cu G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AMN, BMN, CMN, iar cu G_1', G_2', G_3' centrele de greutate ale patrulaterelor $BCMN$, $CAMN$, $ABMN$. Să se arate că triunghiurile $G_1G_2G_3$ şi $G_1'G_2'G_3'$ sînt echilaterale.

C. Cocea

Soluţie

Fie P mijlocul segmentului MN, iar Q, R, S mijloacele laturilor BC, CA, AB. Se ştie că $G_1P = 1/3PA$.



Considerăm omotetia O de centru P şi raport 1/3. Avem $G_1 = O(A)$, $G_2 = O(B)$, $G_3 = O(C)$. Deci triunghiul $G_1G_2G_3$ este omoteticul triunghiului ABC, deci este echilateral. Se ştie că G_1' este mijlocul segmentului PQ. Considerînd omotetia O $(P, 1/2)$ avem: $G'_1 = O(Q)$, $G'_2 = O(R)$, $G'_3 = O(S)$

Deci triunghiul $G'_1G'_2G'_3$ este omoteticul triunghiului QRS care este echilateral.

Prin urmare şi $G'_1G'_2G'_3$ este echilateral.

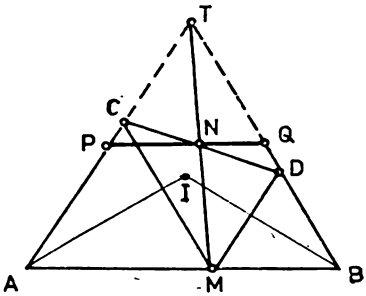
52. Fie M un punct variabil pe segmentul AB. De aceeaşi parte a segmentului AB construim triunghiurile echilaterale AMC şi BMD.

a) Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului CD.

b) Centrul cercului circumscris triunghiului MCD este fix.

Soluţie

a) Fie $\{T\} = AC \cap BD$, iar P şi Q mijloacele segmentelor TA şi TB. Notăm cu N mijlocul lui CD. Cum $\sphericalangle AMC = 60° = \sphericalangle ABT$, rezultă $MC \parallel CT$. Deci $MCTD$ este paralelogram, prin urmare N este mijlocul segmentului AM. Considerăm omotetia $O(T, 1/2)$. Avem $O(M) = N$, prin urmare locul geometric al lui N este omoteticul segmentului AB prin omotetia $O(T, 1/2)$, adică segmentul PQ $(P, Q$ mijloacele segmentelor (AT) şi $(BT))$.



b) Fie I centrul cercului înscris triunghiului TAB, care este fix. Deoarece ΔCAM este echilateral, IA este mediatoarea segmentului MC. La fel IB este mediatoarea segmentului MD, deci I este centrul cercului circumscris triunghiului CMD.

53. Fie ABC un triunghi echilateral, iar d o dreaptă oarecare în plan, neparalelă cu nici una din laturile triunghiului. Paralelele prin A, B, C la d taie laturile BC, CA, AB în A', B', C'. Fie A'', B'', C'' simetricele punctelor A', B', C' faţă de mijloacele laturilor BC, CA respectiv AB. Să se arate că dreptele AA'', BB'', CC'' sînt concurente.

C. Cocea

Soluţie

Dacă ABC este triunghi echilateral, două drepte AA' şi AA'' ($A' \in BC$, $A'' \in BC$) sînt izotomice dacă şi numai dacă sînt izogonale, lucru care este evident. Cum AA' şi AA'' sînt izotomice, rezultă că sînt izogonale. Deci, dreptele AA'', BB'', CC'' sînt izogonalele dreptelor paralele AA', BB', CC', care se intersectează în punctul de la infinit P_∞ al dreptei d. Urmează că dreptele AA'', BB'', CC'' se intersectează în izogonalul punctului P.

Observaţie. Conform unei teoreme cunoscute, izogonalul unui punct de la infinit se află pe cercul circumscris triunghiului. Deci, AA'', BB'', CC'' se intersectează într-un punct situat pe cercul circumscris triunghiului ABC.

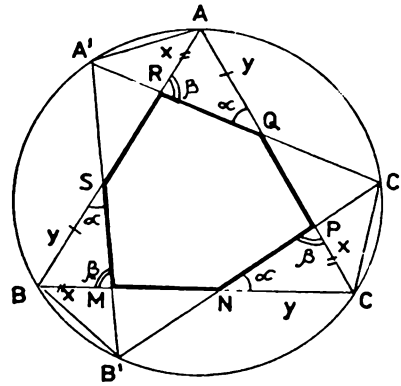
54. Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri echilaterale congruente, de arie S, situate în acelaşi plan şi avînd acelaşi centru O. Dacă σ este aria suprafeţei comune celor două triunghiuri, să se arate că $\sigma \geq 2/3 \cdot S$.

Cătălin Chiriac

Soluţie

Considerăm notaţiile ca în figură.

Fie $\sphericalangle AQR = \alpha$ şi $\sphericalangle ARQ = \beta$, iar $AR = x$, $AQ = y$. Evident că triunghiurile ARQ, BSM, CNP sînt congruente. Avem



$$AA' = BB' = CC' = 2R \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\sphericalangle A'RA = 180^\circ - (120^\circ - \alpha) = 60^\circ + \alpha$$

Teorema sinusurilor aplicată în triunghiul $A'AR$ ne dă:

$$(1)\quad \frac{AA'}{\sin(60^\circ + \alpha)} = \frac{x}{\sin(60^\circ - \frac{\alpha}{2})}$$

Deci:

$$(2)\quad x = \frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}\sin(60^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin(60^\circ + \alpha)}$$

Din triunghiul ARQ avem:

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{y}{\sin(120^\circ - \alpha)} = \frac{y}{\sin(60^\circ + \alpha)}$$

de unde:

$$y = \frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}\sin(60^\circ - \frac{\alpha}{2})\sin(60^\circ + \alpha)}{\sin(60^\circ + \alpha)\sin\alpha} =$$

$$= \frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}\sin(60^\circ - \frac{\alpha}{2})}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{R\sin(60^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Dar $\sigma[ARQ] = \frac{xy\sin 60^\circ}{2} = \frac{xy\sqrt{3}}{4}$

Trebuie arătat că:

$$\sigma[ABC] - 3\sigma[ARQ] \geq \frac{2}{3}S$$

sau:

$\frac{3xy\sqrt{3}}{4} \leq \frac{1}{3}\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ inegalitate echivalentă cu $3xy \leq R^2$.

Avînd în vedere expresiile pentru x şi y, inegalitatea $3xy \leq R^2$ este echivalentă cu:

$$\frac{2R^2\,tg\frac{\alpha}{2}\sin^2(60^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin(60^\circ + \alpha)} \leq R^2 \text{ sau: } \frac{3\,tg\frac{\alpha}{2}[1 - \cos(120^\circ - \alpha)]}{\sin(60^\circ + \alpha)} \leq 1 \leftrightarrow$$

$$\frac{3\,tg\frac{\alpha}{2}[1 + \cos(60^\circ + \alpha)]}{\sin(60^\circ + \alpha)} \leq 1 \leftrightarrow \frac{3\,tg\frac{\alpha}{2}\,2\cos^2(30^\circ + \frac{\alpha}{2})}{2\sin(30^\circ + \frac{\alpha}{2})\cos(30^\circ + \frac{\alpha}{2})} \leq 1$$

sau încă:

$$\frac{3\,tg\frac{\alpha}{2}}{tg(30^\circ + \frac{\alpha}{2})} \leq 1 \leftrightarrow \frac{3\,tg\frac{\alpha}{2}(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}tg\frac{\alpha}{2})}{\frac{\sqrt{3}}{2} + tg\frac{\alpha}{2}} \leq 1$$

Această ultimă inegalitate este echivalentă cu:

$\sqrt{3}\,tg^2\frac{\alpha}{2} - 2\,tg\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \geq 0$ sau:

$\sqrt{3}(tg\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 \geq 0$, inegalitate evidentă.

55. Fie ABC un triunghi echilateral de centru O şi latură $l = \sqrt{3}$ iar M un punct în planul triunghiului astfel încît $MA \leq 1$ şi $MB \leq 1$. Să se arate că $OM \leq 1$.

C. Cocea

Soluţie

Evident că raza cercului circumscris triunghiului este egală cu 1. Fie $A(A; 1)$ şi $B(B; 1)$. Deoarece $MA \leq 1$, M se găseşte în interiorul sau pe frontiera discului A. Analog M se găseşte în interiorul sau pe frontiera discului B.

Cercurile A şi B se taie, evident, în O şi în punctul M, mijlocul arcului AB. Cum M se află în discul A şi B, se va afla în intersecţia acestor discuri care este zona haşurată din figură. Cum zona haşurată este în interiorul cercului circumscris triunghiului, rezultă că $OM \leq 1$.

56. Dacă pe laturile unui triunghi ABC construim spre exterior triunghiurile echilaterale BA_1C, CB_1A, AC_1B atunci:

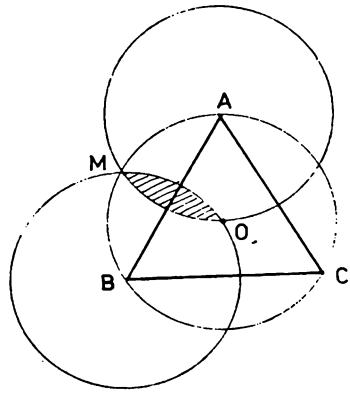
a) segmentele AA_1, BB_1, CC_1 sînt congruente.

b) dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente într-un punct T.

c) cercurile circumscrise triunghiurilor echilaterale trec prin T şi laturile triunghiului se văd din T sub unghiuri egale.

d) centrele triunghiurilor echilaterale formează un triunghi echilateral.

Teorema lui Torricelli



Soluţie

a) Fie T punctul de intersecţie al dreptelor BB_1 şi CC_1. Triunghiurile AC_1C şi ABB_1 sînt congruente deoarece $AC_1 = AB$, $AC = AB_1$ şi $\sphericalangle C_1AC = \sphericalangle BAB_1 = \sphericalangle BAC + 60°$. Rezultă $BB_1 = CC_1$. Analog $AA_1 = BB_1$.

b) Trebuie să arătăm că punctele A, T, A_1 sînt coliniare. Din $\Delta ABB_1 \equiv \Delta AC_1C$ avem $\sphericalangle AC_1T = \sphericalangle ABT$ şi prin urmare patrulaterul AC_1BT este inscriptibil.

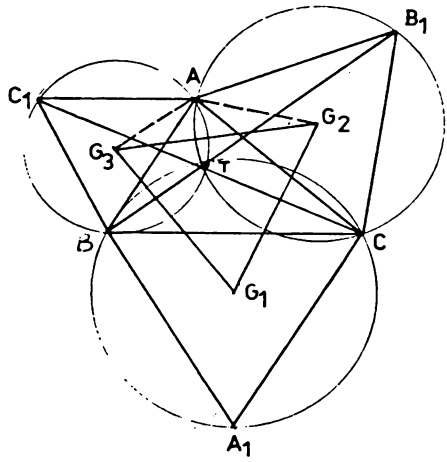
Deci $\sphericalangle ATC_1 = \sphericalangle ABC_1 = 60°$ şi $\sphericalangle C_1TB = \sphericalangle BAC_1 = 60°$.

Analog $\sphericalangle ATB_1 = \sphericalangle B_1TC = 60°$. Avem:

$\sphericalangle BTC = 360° - 4 \cdot 60° = 120°$ şi cum $\sphericalangle BA_1C = 60°$, patrulaterul BA_1CT este inscriptibil.

Obţinem: $\sphericalangle BTA_1 = \sphericalangle BCA_1 = 60°$ şi atunci:

$\sphericalangle ATA_1 = \sphericalangle ATB + \sphericalangle BTA_1 = 120° + 60° = 180°$, deci A, T, A_1 sînt coliniare, prin urmare AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente în T.



c) Am demonstrat la punctul anterior că $\sphericalangle ATB = \sphericalangle ATC = \sphericalangle BTC = 120°$ şi acum este evident că cercurile circumscrise triunghiurilor echilaterale trec prin T.

d) Fie G_1, G_2, G_3 centrele triunghiurilor echilaterale. Avem:

$$\frac{AG_3}{AB} = \frac{AG_2}{AB_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dar $\sphericalangle G_3AG_2 = 30° + \sphericalangle BAC + 30° =$
$= \sphericalangle BAC + 60° = \sphericalangle ABB_1$. Atunci triunghiurile AG_3G_2 şi ABB_1 sînt asemenea şi urmează că

$$\frac{G_3G_2}{BB_1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad deci \quad G_3G_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}BB_1$$

Analog

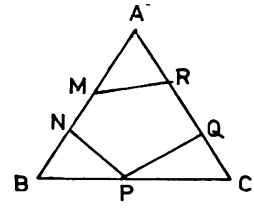
$$G_1G_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}AA_1, \quad G_1G_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}CC_1.$$

Cum $AA_1 = BB_1 = CC_1$ rezultă că $G_1G_2 = G_2G_3 = G_3G_1$, deci triunghiul $G_1G_2G_3$ este echilateral.

57. Care sînt poligoanele regulate ce pot avea toate vîrfurile pe laturile unui triunghi echilateral ?

Soluţie

Fie ABC un triunghi echilateral.Cum oricărui poligon regulat i se poate circumscrie un cerc, vîrfurile poligonului regulat vor fi la intersecţia dintre un cerc şi triunghiul echilateral. Urmează că $n \leq 6$. Se poate constata uşor că într-un triunghi echilateral se poate înscrie un triunghi echilateral, un pătrat şi un hexagon regulat. Vom arăta că nu se poate înscrie un pentagon regulat. Să presupunem că există. Fie acesta $MNPQR$ ca în figură. Cum unghiul unui pentagon regulat este de 108°, urmează că



$\sphericalangle AMR = \sphericalangle ARM = 180° - 108° = 72°$. Atunci suma unghiurilor triunghiului AMR ar fi egală cu $60° + 72° + 72° = 204°$, contradicţie. Deci nu există pentagon regulat înscris într-un triunghi echilateral.

58. Dintr-un punct al cercului circumscris triunghiului echilateral ABC sînt construite paralele la BC, CA, AB care intersectează CA, AB şi BC în punctele M, N şi Q. Să se arate că M, N, Q sînt coliniare.

Soluţie

Avem: $\left.\begin{matrix} PM \parallel BC \\ PN \parallel CA \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sphericalangle MPN = \sphericalangle ACB = \sphericalangle BAC$

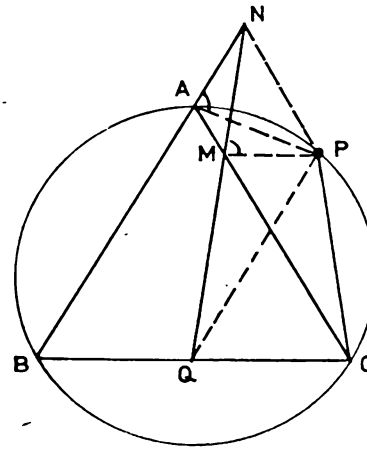
Rezultă $AMPN$ patrulater inscriptibil, deci $\sphericalangle PMN = \sphericalangle PAN$

$\left.\begin{matrix} PM \parallel BC \\ PQ \parallel BA \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sphericalangle MPQ = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \sphericalangle MCQ$

Rezultă că $MPCQ$ este patrulater inscriptibil, deci $\sphericalangle PMQ = 180° - \sphericalangle PCQ$. Dar $ABCP$ este inscriptibil; rezultă

$\sphericalangle PCQ = \sphericalangle NAP = \sphericalangle PCB$.

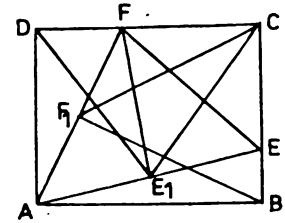
Atunci:
$\sphericalangle PMN = \sphericalangle NAP = \sphericalangle PCQ =$
$= 180° - \sphericalangle PMQ$
Rezultă
$\sphericalangle PMN + \sphericalangle PMQ = 180°$, deci M, N, Q sînt coliniare.



59. Fie $ABCD$ un dreptunghi, E un punct pe BC, F un punct pe CD, E_1 mijlocul lui AE şi F_1 mijlocul lui AF. Arătaţi că dacă triunghiul AEF este echilateral, atunci şi triunghiurile DE_1C şi BF_1C sînt de asemenea echilaterale.

Soluţie

Cum triunghiul AEF este echilateral şi E_1 mijlocul lui AE, rezultă că FE_1 mediană şi înălţime, deci
$FE_1 \perp AE$
$\left.\begin{matrix}\sphericalangle FE_1E = 90° \\ \sphericalangle FCE = 90°\end{matrix}\right\} \Rightarrow FCEE_1$ patrulater inscriptibil
$\Rightarrow \sphericalangle FCE_1 = \sphericalangle FEE_1 = 60°$.
Dar $FE_1 \perp AE$ rezultă $\sphericalangle FE_1A = 90°$ şi cum $\sphericalangle ADF = 90°$, rezultă că $ADFE_1$ este patrulater inscriptibil, prin urmare $\sphericalangle E_1DF = FAE_1 = 60°$. Din $\sphericalangle E_1DF = \sphericalangle E_1CF = 60°$ rezultă că triunghiul E_1DC este echilateral. Analog se demonstrează că BF_1C este triunghi echilateral.



60. Fie O un punct în interiorul triunghiului echilateral ABC, iar M, N, P intersecţiile dreptelor AO, BO, CO cu laturile, iar R raza cercului circumscris triunghiului. Dacă:

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} = \frac{2}{R}$$

atunci O este centrul cercului circumscris triunghiului.

Soluţie

Fie h înălţimea triunghiului iar l latura triunghiului. Avem: $AM \geq h$, $BN \geq h$, $CN \geq h$, cu egalitate cînd $AM \perp BC$, $BN \perp CA$, $CN \perp AB$.
Atunci:

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} \leq \frac{3}{h} = \frac{6}{l\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3l} = \frac{2}{R}$$

cu egalitate cînd $AM = h$, $AN = h$, $AP = h$. Deci AM, AN, AP sînt înălţimi în triunghi şi atunci O este centrul cercului circumscris.

61. Fie ABC un triunghi echilateral de centru O. Arătaţi că nu există două drepte care să treacă prin O şi să împartă triunghiul în patru poligoane de arii egale.

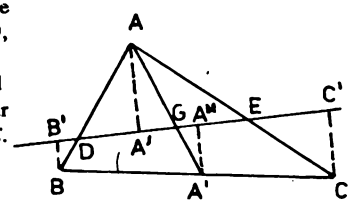
Soluţie

Vom demonstra mai întîi următoarea

LEMĂ.

Fie ABC un triunghi, iar G centrul său de greutate. Fie $D \in [AB]$ şi $E \in [CD]$ încît D, G, E să fie coliniare.

Atunci $\sigma[ADE] \leq 1/2\ \sigma[ABC]$ cu egalitate cînd $D \equiv B$ sau $E \equiv C$. Fie A' mijlocul lui BC, iar A', B' şi C' proiecţiile lui A, B şi C pe DE. Avem:



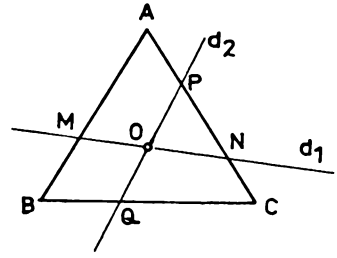
(1) $\frac{BD}{DA} = \frac{BB'}{AA'}$

(2) $\frac{EC}{EA} = \frac{CC'}{AA'}$

Deci

(3) $\frac{BD}{DA} + \frac{EC}{EA} = \frac{BB' + CC'}{AA'} = \frac{2AA''}{AA'} = 1$

(deoarece $2GA' = GA$), unde A'' este proiecţia lui A'pe DE.



Fie $\frac{BD}{DA} = K_1$ şi $\frac{EC}{EA} = K_2$; rezultă

$$\frac{BD}{DA} = \frac{1}{1 + K_1} \text{ şi } \frac{EC}{EA} = \frac{1}{1 + K_2} \text{ Dar}$$

$$\frac{\sigma[ADE]}{\sigma[ABC]} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} = \frac{1}{(1 + K_1)(1 + K_2)}$$

Dar $(1 + K_1)(1 + K_2) = 1 + (K_1 + K_2) + K_1K_2 =$
$= 2 + K_1K_2 \geq 2$.

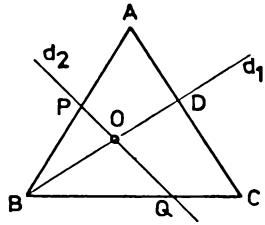
Deci $\sigma[ADE] \leq 1/2\sigma[ABC]$ cu egalitate cînd $K_1 = 0$ sau $K_2 = 0$, adică $D \equiv B$ sau $E \equiv C$.

Să presupunem că există d_1, d_2 care să îndeplinească condiţiile enunţului, iar M, N, P, Q intersecţiile lor cu laturile triunghiului, ca în figura 58.

Cum $\sigma[AMOP] = \sigma[PON] = 1/2\sigma[ABC]$ rezultă $\sigma[AMN] =$
$= 1/2\sigma[ABC]$ şi conform lemei, MN trece prin B sau C.

Să presupunem că MN trece prin B.

Avem $\sigma[BPQ] = \sigma[BPO] + \sigma[BOQ] = 1/4\sigma[ABC]$. Deci
$\sigma[BPQ] = 1/2\sigma[ABC]$; urmează că PQ trece prin A sau C conform lemei. Dar în acest caz, este lesne de văzut că d_1, d_2 nu împart triunghiul în patru părţi echivalente.

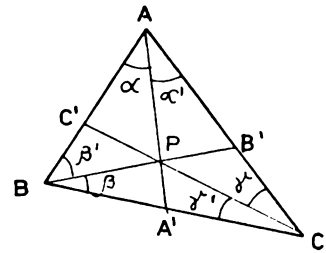


62. Unui triunghi echilateral ABC i se dă o translaţie egală cu latura triunghiului ocupînd poziţia $A'B'C'$. Să se demonstreze că dreptele $A'B$, $B'C$ şi $C'A$ sînt concurente.

Soluţie

LEMĂ Fie ABC un triunghi oarecare şi P în planul său, iar A', B', C' intersecţiile dreptelor PA, PB, PC, cu laturile. Atunci are loc relaţia:

(1) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} \dfrac{\sin\beta}{\sin\beta'} \dfrac{\sin\gamma}{\sin\gamma'} = 1$ şi reciproc



Demonstraţie

Avem

$$(1)\qquad \frac{\sigma[ABA']}{\sigma[ACA']} = \frac{BA'\ AA'\ \sin\sphericalangle BA'A}{A'C'\ AA'\ \sin(180^\circ - \sphericalangle BA'A)} = \frac{A'B}{A'C}$$

Pe de altă parte

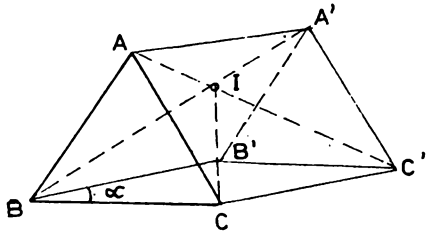
$$(2)\qquad \frac{\sigma[ABA']}{\sigma[ACA']} = \frac{AB\ AA'\ \sin\alpha}{AC\ AA'\ \sin\alpha'} = \frac{c}{b}\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}$$

Avînd în vedere (1) şi relaţia lui Ceva rezultă:

$$(3)\qquad \prod \frac{\sigma[ABA']}{\sigma[ACA']} = 1$$

Dar, din (2) rezultă, avînd în vedere (1):

$$(4)\qquad \prod \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = 1$$



Prin reducere la absurd se arată că dacă are loc (1), atunci dreptele AA', BB', CC' sînt concurente. Utilizînd reciproca teoremei lui Ceva în forma dată de (1) vom rezolva problema noastră. Fie l latura triunghiului.
$AA' = BB' = CC' = l \Rightarrow ABB'A$, $BCC'B$ şi $ACC'A'$ sînt romburi:
Notăm $\sphericalangle B'BC = \alpha$. Se deduce uşor că:

$\sphericalangle ABA' = 30° - \frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle A'BC = 30° + \frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle BCB' = 90° - \frac{\alpha}{2}$,

$\sphericalangle ACB' = 30° - \frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle C'AC = 30° + \frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle C'AB = 90° + \frac{\alpha}{2}$

Avem:

$$\frac{\sin \sphericalangle ABA'}{\sin \sphericalangle A'BC} \frac{\sin \sphericalangle BCB'}{\sin \sphericalangle ACB'} \frac{\sin \sphericalangle C'AC}{\sin \sphericalangle C'AB} =$$

$$= \frac{\sin(30° - \frac{\alpha}{2})}{\sin(30° + \frac{\alpha}{2})} \frac{\sin(90° - \frac{\alpha}{2})}{\sin(30° - \frac{\alpha}{2})} \frac{\sin(30° - \frac{\alpha}{2})}{\sin(90° + \frac{\alpha}{2})} = 1$$

Deci $A'B \cap B'C \cap C'A \neq \varnothing$

Să notăm cu I punctul de intersecţie ca în fig.61.

63. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, T punctul din care laturile se văd sub acelaşi unghi de 120°, iar M, N, P proiecţiile lui T pe laturi. Să se arate că cercul circumscris triunghiului MNP retaie laturile triunghiului ABC în trei puncte ce formează un triunghi echilateral.

C. Cocea

Soluţie

Vom demonstra mai întîi următoarea

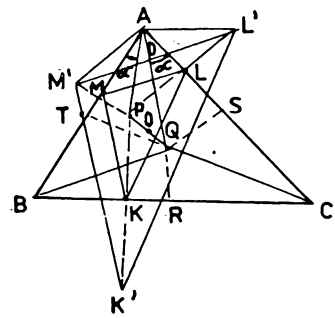
LEMĂ

a) Dacă P şi Q sînt două puncte izogonale în raport cu un triunghi ABC, atunci proiecţiile lui P şi Q pe laturile triunghiului sînt şase puncte conciclice.

b) Triunghiul antipodar al lui Q este omotetic cu triunghiul podar al lui P. (Prin triunghi antipodar al lui Q se înţelege triunghiul format de perpendicularele pe QA, QB, QC.)

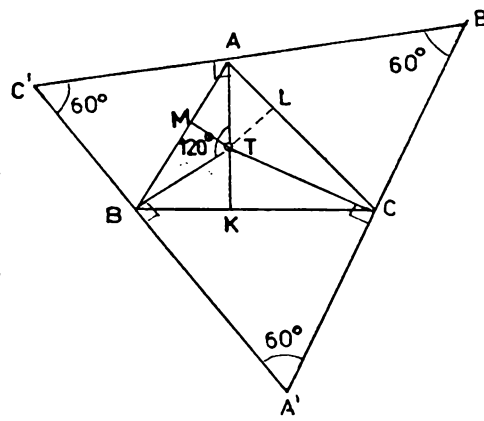
Demonstraţie

a) Fie KLM triunghiul podar corespunzător lui P, iar RST cel corespunzător lui Q. Fie M', K', L' simetricele lui M, K, L faţă de AB, BC, CA. Notăm $\sphericalangle PAM = \alpha$. Avem: $AM' = AP$, $AL' = AP$ deci triunghiul $AM'L'$ este isoscel. Fie D proiecţia lui A pe $M'L'$. $\sphericalangle M'AL' = 2(\sphericalangle PAM + \sphericalangle PAL) = 2\hat{A}$ Dar $\sphericalangle PAL = A - \alpha = \sphericalangle LAL'$. Rezultă $\sphericalangle LAD = \sphericalangle DAL' - \sphericalangle LAL' = \hat{A} - (\hat{A} - \alpha) = \alpha$. Deci AP şi perpendiculara din A pe $M'L'$ sînt izogonale. Dar AD este mediatoarea segmentului $M'L'$. Rezultă că perpendicularele din A, B, C pe $M'L'$, $M'K'$, $K'L'$, care sînt izogonalele lui PA, PB, PC se întîlnesc, în centrul cercului circumscris triunghiului $M'K'L'$ care este Q, izogonalul lui P. Cum triunghiul KLM se obţine din $K'L'M'$ printr-o omotetie de centru P şi raport 1/2, rezultă că cercul circumscris triunghiului KLM este mijlocul lui PQ. Cum mediatoarele segmentelor KR, SL, MT se întîlnesc în mijlocul O al segmentului PQ urmează că punctele K, R, S, L, M, T sînt conciclice.



b) Triunghiul antipodar al lui Q are laturile paralele cu laturile triunghiului $K'L'M'$ care este omotetic cu KLM.

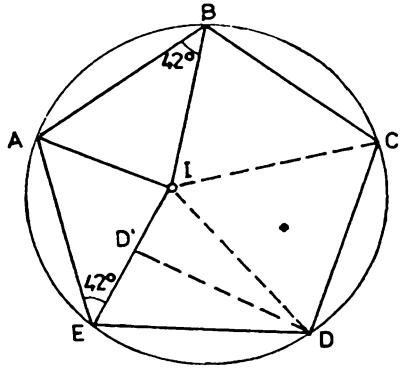
Să trecem la rezolvarea problemei:
Conform lemei, cercul circumscris triunghiului MKL retaie laturile în trei puncte care sînt picioarele izogonalului lui T. Cum acest triunghi podar este asemenea cu triunghiul antipodar al lui T, care se vede uşor că este echilateral, rezultă că cercul circumscris triunghiului podar al lui T retaie laturile triunghiului în trei puncte ce formează un triunghi echilateral.



64. Se consideră pentagonul regulat $ABCDE$, iar în interiorul său punctul I astfel încît triunghiurile ABI şi AEI sînt congruente şi sînt egale cu 42°. Să se arate că triunghiul CDI este echilateral.

Soluţie

Este uşor de demonstrat că triunghiul ICD este isoscel ($IC = ID$). Problema revine la a demonstra că $ID = CD$ sau $ID = ED$. Proiectăm D în D' pe EI. Avem:
$ID = DE \Leftrightarrow EI = 2ED'$ (*)
Un unghi al pentagonului este egal cu 108° şi atunci în triunghiul AEI unghiul cu vîrful în A are 54°, iar cel cu vîrful în I va avea 84°.



Avem: $\dfrac{EI}{\sin 54^\circ} = \dfrac{AE}{\sin 84^\circ}$ de unde

$EI = \dfrac{a \sin 54^\circ}{\sin 84^\circ}$

(a latura pentagonului)
Pe de altă parte, din triunghiul DED' în care
$\hat{E} = 66^\circ$ avem
$ED' = a \cos 66^\circ$. Atunci condiţia (*) revine la:

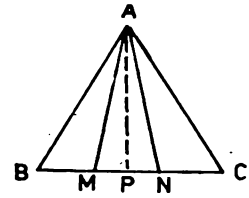
$\dfrac{\sin 54^\circ}{\sin 84^\circ} = 2 \cos 66^\circ$ sau $\sin 54^\circ = 2\sin 84^\circ \cos 66^\circ = 1/2 + \sin 18^\circ$

Dacă notăm $\sin 18^\circ = x$, atunci $\sin 54^\circ = \sin(3 \cdot 18^\circ) = 3x - 4x^3$ şi condiţia de mai sus revine la:
(**) $8x^3 - 4x + 1 = 0$ sau

(***) $4x^2 + 2x - 1 = 0$ (după simplificare cu $x - 1/2$)
Dar x verifică ecuaţia: $16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = 0$ rezultată din $\sin(5 \cdot 18°) = \sin 90° = 1$. Cum $(16x^5 - 20x^3 + 5x - 1) = (x - 1)(4x^2 + 2x - 1)^2$ şi $x \neq 1$, rezultă
$4x^2 + 2x - 1 = 0$ şi astfel este satisfăcută relaţia (***) echivalentă cu (*).
Deci DIC este triunghi echilateral.

65. Fie ABC un triunghi echilateral de latură 1. Pe segmentul BC se iau punctele M şi N astfel încît $BM = CM = x$ unde $x \in (0, 1/2)$. Determinaţi numărul real x astfel încît cercurile înscrise în triunghiurile ABM AMN şi ANC să fie congruente.
L. Pîrşan

Soluţie
Avem: $BM = NC = x$. $MN = 1 - 2x$.
Fie P proiecţia lui A pe BC. Rezultă că



$AM = \sqrt{x^3 - x + 1}$. Avem

• $S_{ABM} = \frac{x\sqrt{3}}{4}$, $S_{AMN} = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - 2x)$.

Condiţia din enunţ revine la:

$$\frac{1}{x + 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \frac{1 - 2x}{1 - 2x + 2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

Amplificînd fracţiile cu conjugatele, obţinem:

$$x + 1 - \sqrt{x^2 - x + 1} = (2\sqrt{x^2 - x + 1} - (1 - 2x))(1 - 2x)$$

sau

$$(x + 1) + (1 - 2x)^2 = \sqrt{x^2 - x + 1} \cdot (3 - 4x)$$

De unde:

$$4x^2 - 3x + 2 = \sqrt{x^2 - x + 1} \cdot (3 - 4x)$$

sau: $\frac{2}{3 - 4x} - x = x^2 - x + 1$

sau încă: $\frac{4}{(3 - 4x)^2} - \frac{4x}{3 - 4x} + x^2 = x^2 - x - 1$

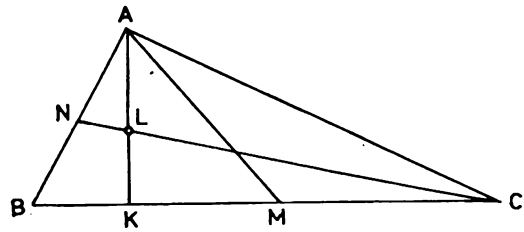
echivalentă cu:
(*) $16x^3 - 24x^2 + 21x - 5 = 0$
Cu ajutorul şirului lui Rolle se demonstrează că ecuaţia (*) are o singură rădăcină în intervalul $(0, 1/2)$. Prin utilizarea formulei lui Cardan deducem că această rădăcină este egală cu:

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{1+2\sqrt{7}} - \sqrt[3]{-1+2\sqrt{7}}\right)$$

66. Fie M un punct oarecare pe cercul circumscris hexagonului regulat $ABCDEF$. Să se arate că punctele Lemoine ale triunghiurilor MAD, MBE şi MCF formează un triunghi echilateral.

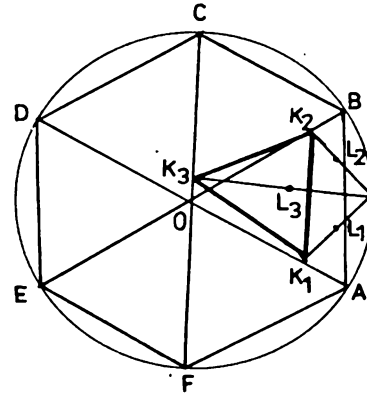
Marius Burtea

Soluţie



Vom demonstra:

LEMĂ Fie ABC un triunghi dreptunghic cu $A = 90°$ iar K piciorul înălţimii din A. Atunci AK este simediană iar punctul lui Lemoine al triunghiului este mijlocul L al segmentului AK". Notăm cu M mijlocul lui BC. Deoarece $\sphericalangle CAM = \sphericalangle AMC = \sphericalangle BAK$, rezultă că AK este simediană. Aplicăm teorema lui Menelaus pentru triunghiul ABC şi transversala CLN, unde L este punctul Lemoine al triunghiului. Avem



$$(1)\quad \frac{AL}{LK}\cdot\frac{KC}{BC}\cdot\frac{NB}{AN} = 1$$

Aplicînd teorema lui Steiner pentru izogonalele AK şi AM avem:

$$\frac{BK}{KC} = \frac{AB^2}{AC^2}\ .\ \text{La fel,}\ \frac{AN}{NB} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

Deci:

$$\frac{KC}{BC} = \frac{AC^2}{AB^2 + AC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

Relaţia (1) devine:

$$\frac{AL}{LK}\cdot\frac{AC^2}{CB^2}\cdot\frac{BC^2}{AC^2} = 1 \Rightarrow AL = LK.$$

Notăm cu K_1, K_2, K_3 proiecţiile lui M pe AD, BE, CF. Fie L_1, L_2, L_3 punctele Lemoine ale triunghiurilor MAD, MBE, MCF. Fie $O(M,2)$

omotetia de centru M şi raport 2. Cum $O(L_1) = K_1$, $O(L_2) = K_2$, $O(L_3) = K_3$ problema revine la a arăta că $K_1K_2K_3$ este echilateral. Observăm că K_1, K_2, K_3 se găsesc pe cercul de diametru OM. Avem $\sphericalangle K_3K_1K_2 = \sphericalangle K_3OK_2 = 60°$ (din patrulaterul inscriptibil $K_2K_3OK_1$), iar $\sphericalangle K_3K_2K_1 = 180° - \sphericalangle K_3OK_1 = 180° - 120° = 60°$ (din patrulaterul inscriptibil $K_2K_3OK_1$). Deci, $K_1K_2K_3$ este echilateral, prin urmare şi $L_1L_2L_3$ este echilateral.

67. Fie A un punct oarecare pe o hiperbolă echilateră (H). Arătaţi că există B, $C \in (H)$ astfel încît triunghiul ABC să fie echilateral.

C. Cocea

Soluţie

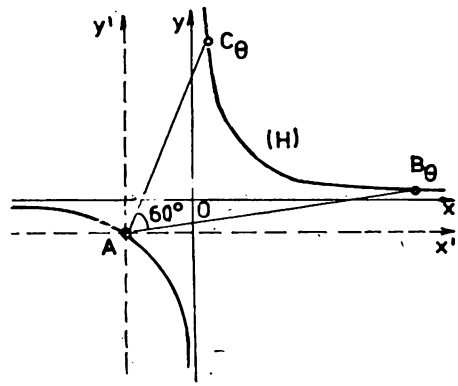
Ducem prin A paralelele Ox' şi Oy' la axe. Fie $A(a, b)$. Ecuaţia hiperbolei (H) este dată de

(1) $xy = K^2$

Fie $\theta \in (0, \pi/6)$. Notăm cu B_θ şi C_θ punctele semidreptelor de origine A astfel ca

$\sphericalangle B_\theta Ax' = \theta$ şi

$\sphericalangle C_\theta Ax' = \theta + \pi/3$



Avem $b = \dfrac{K^2}{a}$

Ecuaţia dreptei AB_θ este dată de:

$$(AB_\theta)\ y - \frac{K^2}{a} = \operatorname{tg}\theta\,(x - a)$$

Intersecţia dreptei AB_θ cu hiperbola (H) revine la rezolvarea sistemului:

$$(1)\quad \begin{cases} y - \dfrac{K^2}{a} = \operatorname{tg}\theta\,(x - a) \\ y = \dfrac{K^2}{x} \end{cases}$$

Avem:

$$(2)\quad \frac{K^2(a - x)}{xa} = \operatorname{tg}\theta\,(x - a)$$

Cum ne interesează abscisa lui B_θ, $x \neq a$, deci:

$$x = -\frac{K^2}{a}\operatorname{ctg}\theta \quad \text{iar } y = -a\operatorname{tg}\theta$$

Prin urmare:

$$(3)\quad B_\theta\left(-\frac{K^2}{a}\operatorname{ctg}\theta,\ -a\cdot\operatorname{tg}\theta\right)$$

Analog obţinem:

(4) $$C_\theta\left(-\frac{K^2}{a}ctg\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right),\ -a\,tg\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Avînd în vedere coordonatele lui B_θ şi C_θ rezultă:

(5) $$AB_\theta^2 = \left(a+\frac{K^2}{a}ctg\ \theta\right)^2 + (b - a\ tg\ \theta)^2$$

(6) $$\overset{\circ}{9}AC_\theta^2 = \left[a+\frac{K^2}{a}\operatorname{ctg}\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right]^2 + \left[b+a\operatorname{tg}\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right]^2$$

Se observă că AB_θ şi AC_θ sînt funcţii continue pentru $\theta \in (0, \pi/6)$

Fie $f: (0, \frac{\pi}{6}) \to \mathbb{R}$, $f(\theta) = AB_\theta - AC_\theta$

Se observă uşor că : $\lim\limits_{\theta\to 0} f(\theta) = +\infty$ şi $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{6}} f(\theta) = -\infty$

Cum f este continuă pe $(0, \pi/6)$ are proprietatea Darboux, deci există θ încît $f(\theta) = 0$, adică $AB_\theta = AC_\theta$. Cum $\sphericalangle C_\theta AB_\theta = \pi/3$ rezultă că triunghiul $AB_\theta C_\theta$ este echilateral.

68. Un segment de lungime constantă $2l$ se deplasează în aşa fel încît A descrie axa Ox, iar B descrie axa Oy. Să se găsească locul descris de punctul C astfel ca triunghiul ABC să fie echilateral.

Soluţie

Fie h înălţimea triunghiului. Avem $h = \frac{2l\sqrt{3}}{2} = l\sqrt{3} = constant$

Punctul C are în reperul $O'x'y'$ coordonatele $C(h, 0)$, deci constante. Notăm cu $\theta = (\sphericalangle xOx')$. Avem $O'(l\sin\theta;\ l\cos\theta)$ (O' mijlocul lui AB). Formulele de la schimbarea axelor dau coordonatele punctului C

(1) $\begin{cases} x = l\sin\theta - h\cos\theta \\ y = l\cos\theta + h\sin\theta \end{cases}$

Privind (1) ca un sistem în $\sin\theta$ şi $\cos\theta$, găsim:

$$\sin\theta = \frac{xl - yh}{l^2 - h^2};$$

$$\cos\theta = \frac{-xh + yl}{l^2 - h^2}$$

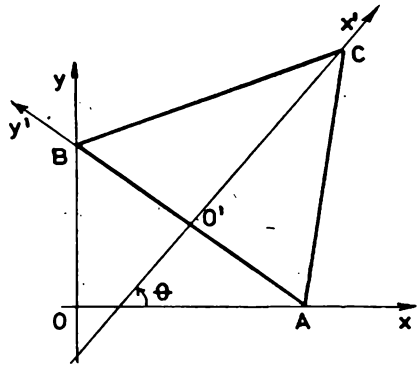
Cum $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$,
obţinem:

(2) $\frac{(xl - yh)^2}{(l^2 - h^2)^2} + \frac{(-xh + yl)^2}{(l^2 - h^2)^2} = 1$

sau

(3) $\left\{ \frac{l^2 + h^2}{(l^2 - h^2)^2}(x^2 + y^2) - \right.$
$\left. - 2xy \frac{lh}{(l^2 - h^2)^2} = 1 \right.$

care reprezintă ecuaţia unei elipse. Se poate demonstra uşor că elipsa are ca axe de simetrie bisectoarele axelor Oxy.



69. Fie ABC un triunghi echilateral, M un punct în interiorul triunghiului iar P, Q, R simetricele lui M faţă de laturi. Determinaţi poziţia punctului M pentru care aria triunghiului PQR este maximă.

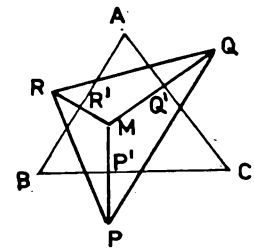
Soluţie

Fie P', Q', R' proiecţiile lui M pe laturi.

Notînd $MP' = x$, $MQ' = y$, $MR' = z$ avem

$\sigma[P'Q'R'] = \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + zx)$ şi $x + y + z =$

$= \sqrt{\sigma[ABC]\sqrt{3}}$



Dar $xy + yz + zx \leq \frac{(x + y + z)^2}{3}$ cu egalitate cînd

$x = y = z$

Deci: $\frac{4\,\sigma[P'Q'R']}{\sqrt{3}} \leq \frac{\sigma[ABC]\sqrt{3}}{3}$

Adică

(*) $4\sigma[P'Q'R'] \leq \sigma[ABC]$

Dar triunghiurile $P'Q'R'$ şi PQR sînt omotetice, cu centrul de omotetie M şi raport 2, deci: $4\sigma[P'Q'R'] = \sigma[PQR]$ şi

avînd în vedere (*) rezultă:

$\sigma[PQR] \leq \sigma[ABC]$,

cu egalitate cînd $x = y = z$, deci cînd M este centrul triunghiului ABC.

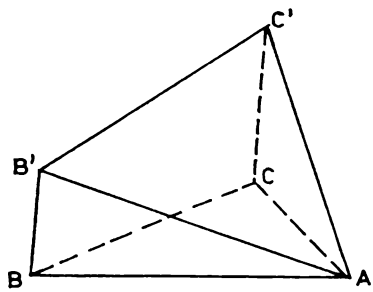
70. Orice triunghi este proiecţia ortogonală a unui triunghi echilateral.

acad. Al. Myller şi prof.univ. I. Popa

Soluţie

Presupunem că $a \geq b \geq c \geq 0$. În prisma dreaptă de bază ABC vom arăta că există o secţiune prin A încît triunghiul $AB'C'$ să fie echilateral.

Să presupunem că există acest triunghi. Fie x latura sa, iar y, z cotele punctelor B' şi C'. Atunci avem ecuaţiile:



$$\begin{cases} c^2 + y^2 = x^2 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 - c^2} & (1) \\ b^2 + c^2 = x^2 \Rightarrow z = \sqrt{x^2 - b^2} & (2) \\ a^2 + (y - z)^2 = x^2 & (3) \end{cases}$$

Din (1), (2) şi (3) rezultă

$$x^2 - a^2 = (\sqrt{x^2 - c^2} - \sqrt{x^2 - b^2})^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - a^2 = 2x^2 - c^2 - b^2 - 2\sqrt{x^2 - c^2}\cdot\sqrt{x^2 - b^2} \Rightarrow$$

$$x^2 + a^2 - c^2 - b^2 = 2\sqrt{(x^2 - c^2)(x^2 - b^2)}$$

Ridicînd la pătrat, după reduceri, rezultă:
$3x^4 - 2(a^2 + b^2 + c^2)x^2 + (3b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4) = 0$. Rezultă:

$$(*)\ x^2 = \frac{1}{3}\left[a^2 + b^2 + c^2 \pm \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2}\right]$$

Ambele soluţii ale ecuaţiei (*) sînt pozitive, dar va trebui s-o luăm pe aceea pentru care $x \geq a$. Avem:

$$x^2 - a^2 = \frac{1}{3}\left[-2a^2 + b^2 + c^2 \pm \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2}\right]$$

Pentru soluţia cu $-$ în faţa radicalului avem:
$(b^2 - a^2) + (c^2 - a^2) - (a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2) < 0$
deci nu este posibilă această soluţie. Rezultă:

$$x^2 = \frac{1}{3}\left[a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2}\right]$$

Deci, $x = \sqrt{\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2}}$

Înlocuind în (1) şi (2) obţinem y şi z (luăm numai valorile pozitive). Deci triunghiul echilateral este determinat prin lungimea laturii şi poziţia lui prin cotele vîrfurilor B', C'.

71. Fie ABC un triunghi echilateral de latură m şi M un punct oarecare pe arcul $\overset{\frown}{BC}$ al cercului circumscris triunghiului ABC. Dreptele MA, MB, MC întîlnesc laturile BC, CA, AB în α, β respectiv γ. Notînd $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$, $M\alpha = a'$, $M\beta = b'$, $M\gamma = c'$ arătaţi că:

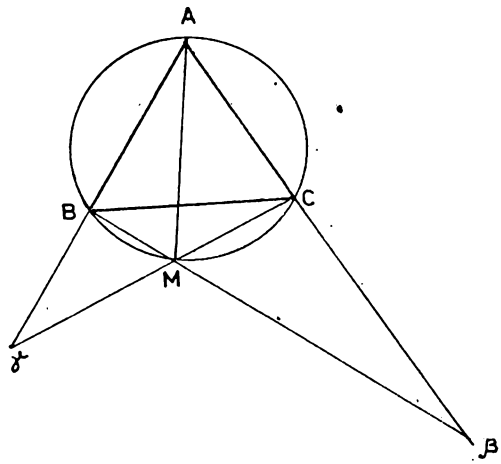
1) $\frac{1}{a'} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$; $\frac{1}{b'} = \frac{1}{c} - \frac{1}{a}$; $\frac{1}{c'} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$

2) $\sigma[\alpha\beta\gamma] = 2\sigma[ABC]$

3) $\Delta ABM \sim \Delta A\alpha\beta$; $\Delta BMC \sim \Delta BC\beta \sim \Delta\gamma BC$

4) $m^2 = AM \cdot A\alpha = BM \cdot B\beta = CM \cdot C\gamma = C\beta \cdot B\gamma$

Soluţie



Pentru fixare luăm $MB < MC$.

1) $M\alpha A$ bisectoare în triunghiul BMC ($\sphericalangle BMA = \sphericalangle AMC = 60°$); rezultă $\Delta M\alpha B \sim$

$$\Delta MCA \Rightarrow \frac{M\alpha}{MC} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow M\alpha \cdot MA = MC \cdot MB \Rightarrow a' = \frac{bc}{a}$$

Din teorema lui Van Schooten: $a = b + c$, rezultă $\frac{1}{a'} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ $BM\beta$ bisectoare

exterioară în ΔAMC, rezultă analog: $M\beta \cdot MB = MC \cdot MA \Rightarrow b' = \frac{ca}{b'} \Rightarrow$

$$\frac{1}{b'} = \frac{a - c}{ca} = \frac{1}{c} - \frac{1}{a} \quad \text{Analog} \quad \frac{1}{c'} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$$

2) Se observă uşor că M este punct izogonal al triunghiului $\alpha\beta\gamma$

Avem:

$\sigma[\alpha\beta\gamma] = \sigma[M\alpha\beta] + \sigma[M\alpha\gamma] + \sigma[M\beta\gamma] =$

$$= (M\alpha \cdot M\beta + M\alpha \cdot M\gamma + M\beta \cdot M\gamma) \frac{\sin 120^\circ}{2} = (a'b' + b'c' + c'a') \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Dar $\sigma[ABC] = \frac{m^2\sqrt{3}}{4}$ rezultă $\frac{\sigma[\alpha\beta\gamma]}{\sigma[ABC]} = \frac{a'b' + b'c' + c'a'}{m^2}$

Din relaţia lui Leibniz avem: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

sau: $a^2 + b^2 + c^2 = 6R^2 = 6 \left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)^2 = 2m^2$

Din (1) $a'b' = c^2$, $b'c' = a^2$; $c'a' = b^2$ rezultă

$$\frac{\sigma[\alpha\beta\gamma]}{\sigma[ABC]} = \frac{2m^2}{m^2} = 2$$

3) şi 4)

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle MAB = \sphericalangle BA\alpha \\ \sphericalangle AMB = \sphericalangle AB\alpha = 60^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMB \sim \Delta AB\alpha \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AB}{A\alpha} \Rightarrow AM \cdot A\alpha = m^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle MBC = \sphericalangle CB\beta \\ \sphericalangle BMC = \sphericalangle BC\beta = 120^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BMC \sim \Delta BC\beta \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BC}{B\beta} \Rightarrow B\beta \cdot BM = m^2$$

Analog $\Delta BMC \sim \Delta\gamma BC \Rightarrow \frac{C\gamma}{CB} = \frac{CB}{CM} \Rightarrow CM \cdot C\gamma = m^2$

$$\Delta BC\beta \sim \Delta\gamma BC \Rightarrow \frac{BC}{\gamma B} = \frac{C\beta}{BC} \Rightarrow C\beta \cdot B\gamma = m^2$$

72. Într-un triunghi echilateral de latură a, unghiul Brocard ω şi aria σ a triunghiului podar al unui punct oarecare sînt legate prin relaţia:

$$\sqrt{3} + cotg\omega = \frac{3a^2}{8\sigma}$$

R. Goormaghtigh

Soluţie

Dacă ω şi σ sînt unghiul Brocard şi aria triunghiului podar PQR a unui punct oarecare în raport cu ABC, atunci:

$$cotg\omega = \frac{1}{4\sigma}(QR^2 + RP^2 + PQ^2) = \frac{1}{4\sigma}\sum QR^2.$$

Fie x, y, z distanţele de la M la laturi. Avem:

$$\sum x = \frac{1}{2}a\sqrt{3}, \quad \sigma = \frac{1}{2}\sum yz\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}\sum yz$$

$$QR^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos 120^\circ = y^2 + z^2 + yz$$

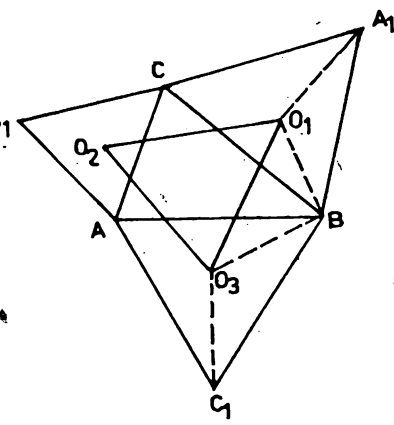
$$\sum QR^2 = 2\sum x^2 + \sum yz = 2(\sum x)^2 - 3\sum yz$$

sau: $\sum QR^2 = \frac{3}{2}a^2 - 4\sigma\sqrt{3}$

Atunci: ctg $\omega = \frac{3a^2}{8\sigma} - \sqrt{3}$ sau $\sqrt{3} + \text{ctg}\omega = \frac{3a^2}{8\sigma}$

73. Fie ABC un triunghi oarecare. Pe laturile acestui triunghi se construiesc în exterior triunghiuri echilaterale ale căror centre sînt vîrfurile unui triunghi de arie S. Centrele triunghiurilor echilaterale construite pe laturi în interior sînt vîrfurile unui triunghi de arie S'. Arătaţi că:

$$S - S' = \sigma[ABC].$$



Soluţie

Fie notaţiile ca în figură. Se ştie din teorema lui Torricelli că triunghiul $O_1O_2O_3$ este echilateral. Avem:

$O_1O_3^2 = O_3B^2 + O_1B^2 - 2BO_1BO_3\cos(60^\circ + B) =$

$$= \frac{c^2}{3} + \frac{a^2}{3} - 2\frac{ac}{3}\left(\frac{1}{2}\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right)$$

$$\frac{2(a^2+c^2)-2ac\cos B}{6} =$$

$$+ \frac{4\sigma[ABC]\sqrt{3}}{6} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\sigma[ABC]}{6}$$

Rezultă $S = \frac{\sqrt{3}}{4} O_1O_3^2$

Printr-un procedeu analog se găseşte că:

$O_1'O_3'^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}\sigma[ABC]}{6}$ unde O'_1, O'_3 sînt centrele

triunghiurilor echilaterale construite spre interior pe BC şi AB.

Rezultă $S' = \frac{\sqrt{3}}{4} O_1'O_3'^2$. Avem:

$$S - S' = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\sigma[ABC] - a^2 - b^2 - c^2 + 4\sqrt{3}\sigma[ABC]}{6} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{8\sigma[ABC]\sqrt{3}}{6} = \sigma[ABC]$$

74. Trei puncte sînt date în plan. Prin aceste puncte sînt duse trei drepte ce formează un triunghi echilateral. Găsiţi locul geometric al centrelor acestor triunghiuri.

Soluţie

Fie ABC triunghiul dat. Două familii de triunghiuri echilaterale circumscrise triunghiului ABC sînt posibile. Prima se obţine în modul următor: se construiesc cercuri pe laturile triunghiului astfel încît măsurile arcelor de cerc situate în exteriorul triunghiului ABC să fie $\frac{4\pi}{3}$. Fie A_1 un punct arbitrar pe cercul construit pe BC. A_1B intersectează cercul construit pe BA a doua oară în C_1 şi A_1C intersectează cercul construit pe CA în B_1. Triunghiul $A_1B_1C_1$ astfel obţinut aparţine primei familii. Fie E, F, G intersecţiile bisectoarelor triunghiului $A_1B_1C_1$ cu cercurile construie pe laturi. Evident, E, F, G sînt fixe. (E mijlocul arcului de cerc construit pe BC de aceeaşi parte a lui BC ca şi triunghiul ABC). Punctele E, F, G sînt centrele triunghiurilor echilaterale construite pe laturile triunghiului ABC în interior. E cunoscut faptul că triunghiul EFG este echilateral şi că centrul său este G_0 centrul de greutate al triunghiului ABC (din teorema lui Torricelli). Se demonstrează uşor că centrul triunghiului $A_1B_1C_1$ aparţine cercului circumscris triunghiului EFG. Pătratul razei

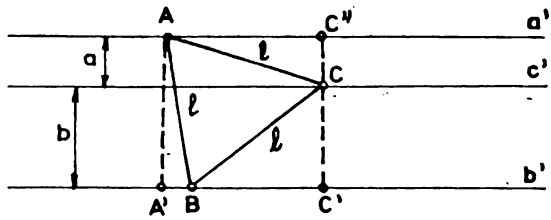
acestui cerc este $\frac{1}{18}(a^2 + b^2 + c^2 - 4S\sqrt{3})$, notaţiile fiind cele obişnuite. Aceasta se deduce uşor de exemplu din problema 74. A doua familie de triunghiuri echilaterale circumscrise lui ABC este obţinută dacă în afară se construiesc pe laturi arce de mărime $\frac{2\pi}{3}$. Locul geometric găsit este astfel constituit din două cercuri concentrice de centru G_0 (centrul de greutate al triunghiului ABC) şi de raze

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 \pm 4S\sqrt{3}}{2}}$$

75. Să se demonstreze că dacă un triunghi echilateral are vîrfurile pe trei drepte paralele, care au distanţele între ele a, b latura triunghiului este egală cu

$$l = 2\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$$

Soluţie



Fie ABC triunghiul echilateral, A', C' proiecţiile lui A şi C pe b', iar C'' proiecţia lui C pe a'. Fie $A'B = x$ şi $BC' = y$. Evident $AC' = x + y$. Din triunghiul dreptunghic $AA'B$ avem:

(1) $$x = \sqrt{l^2 - (a + b)^2}$$

Din triunghiul BCC' dreptunghic (2) $y = \sqrt{l^2 - b^2}$

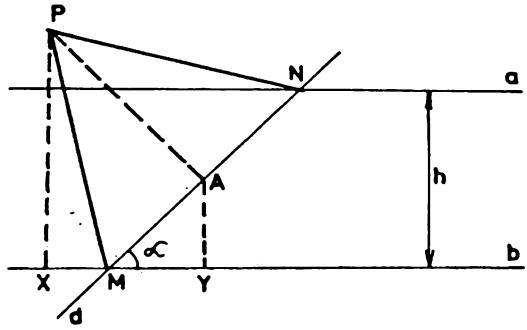
Aplicînd teorema lui Pitagora în $\Delta AC''C$ avem:

(3) $$l^2 = \left(\sqrt{l^2 - (a + b)^2} + \sqrt{l^2 - b^2}\right)^2 + a^2$$

Din (3) după calcule rezultă relaţia din enunţ.

76. Printr–un punct egal depărtat de două drepte paralele date, se construieşte o dreaptă oarecare ce intersectează dreptele date în M şi N. Găsiţi locul geometric al punctului P pentru care triunghiul MNP este echilateral.

Soluţie



Cum a, b fixe, $a \parallel b$ rezultă că $d(a, b) = h =$ constant. A fix $\Rightarrow pr_b A = Y$, fix. Fie $\{M\} = d \cap b$ şi $\{N\} = d \cap a$. Fie $\sphericalangle(d, b) = \alpha$ cu $\alpha \leq 90°$, rezultă

$MN = \dfrac{h}{\sin\alpha}$. Dar $d(A, a) = d(A, b)$, $a \parallel b$ rezultă A mijlocul segmentului MN şi

cum MNP este echilateral, rezultă $PA = \dfrac{MN\sqrt{3}}{2}$.

Dar

$$\left.\begin{array}{l} PA \perp MN \\ \sphericalangle(MN, b) = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \sphericalangle(PA, b) = 90° - \alpha.$$

Fie $x = pr_b P$ rezultă $XY = PA\cos(90° - \alpha) = PA \sin\alpha =$

$$= \frac{MN\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = \frac{h\sqrt{3}}{2\sin\alpha}\sin\alpha = \frac{h\sqrt{3}}{2} = \text{constant}.$$

Cum Y fix, X, $Y \in b$ rezultă X fix. Dar $PX \perp b$, b fixă rezultă că locul geometric al lui P este perpendiculara în X pe b. Datorită simetriei locul geometric va conţine şi simetrica perpendicularei în X pe b, faţă de Y.

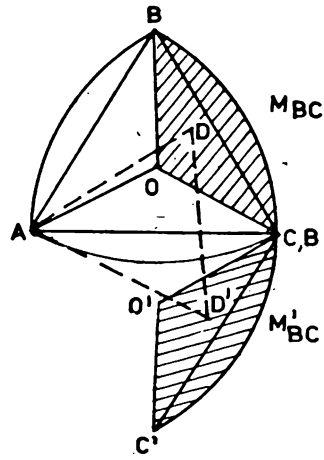
77. Găsiţi toate valorile lui $n \in N$ mai mare decît 2, pentru care în plan putem alege n puncte cu următoarea proprietate: oricare două puncte sînt vîrfurile unui triunghi echilateral, cu cel de al treilea vîrf făcînd parte din cele n puncte alese.

Soluţie

Luăm din cele n puncte două puncte pentru care distanţa este maximă (adică diametrul mulţimii). Fie acestea A şi B. Există $C \in M$ astfel încît ABC să fie echilateral. Cum

$$\max_{M,\, N \in M} \|MN\| = AB \ ,$$ rezultă că $M \subset S$

unde S este figura de mai sus limitată de intersecţiile cercurilor de centre A, B, C şi rază AB. Fie O centrul lui ABC. AO, BO, CO împart S în 3 părţi în care vom arăta că nu mai există nici un punct în afară de A, B, C. Fie $D \in M$ şi D luat ca în figură. Rezultă că există $D' \in M$ astfel încît ADD' să fie echilateral. D' se obţine din D printr−o rotaţie în jurul lui A cu 60°, rezultă $D' \in M'_{BC}$ (M_{BC} şi M'_{BC} sînt mulţimile haşurate).



$M'_{BC} = R_{A,60°}(M_{BC})$

Cum $\sphericalangle BAC = 60°$ rezultă $C' = B$ sau $B' = C$.

Să presupunem că $B' = C$ $(B' = R_{A,60°}(B))$. M'_{BC} şi M sînt în semiplane opuse determinate de $B'O'$ deoarece $\sphericalangle BB'O' = \sphericalangle BCA + \sphericalangle AB'O' = 90°$, rezultă $B'O'$ tangentă arcului $\overset{\frown}{AC}$, deci M'_{BC} şi M au un singur punct comun punctul B. Rezultă $D' = B$, contradicţie cu alegerea lui D oarecare. Prin urmare $n = 3$.

78. Să se arate că trisectoarele unui triunghi se intersectează în trei puncte care sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

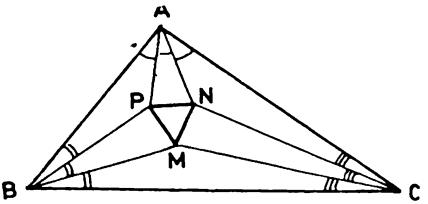
Teorema lui Morley

Soluţie trigonometrică.

Fie M, N, P punctele de intersecţie a trisectoarelor. Teorema sinusurilor în triunghiul APB dă:

$$\frac{AP}{\sin\frac{B}{3}} = \frac{AB}{\sin\frac{A+B}{3}}$$

Deci:



$$AP = \frac{c \sin \frac{B}{3}}{\sin \frac{\pi - C}{3}} = \frac{2R \sin C \sin \frac{B}{3}}{\sin\left(\frac{\pi - C}{3}\right)} =$$

$$= \frac{2R \sin(\pi - C)\sin \frac{B}{3}}{\sin \frac{\pi - C}{3}} = \frac{2R \sin\frac{B}{3} \sin \frac{\pi - C}{3}\left[3 - 4 \sin^2 \frac{\pi - C}{3}\right]}{\sin \frac{\pi - C}{3}} =$$

$$= 2R \sin \frac{B}{3}\left[3 - 2\left[1 - \cos \frac{2\pi - 2C}{3}\right]\right] = =$$

$$2R \sin \frac{B}{3}\left[1 + 2 \cos \frac{2\pi - 2C}{3}\right] =$$

$$= 4R \sin \frac{B}{3}\left[\frac{1}{2} + \cos\frac{2\pi - 2C}{3}\right] = 4R \sin \frac{B}{3}\left[\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi - 2C}{3}\right] =$$

$$= 8R \sin \frac{B}{3} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{C}{3}\right) = 8R \sin \frac{B}{3} \cos \frac{B}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{B}{3}\right).$$

Deci:

(1) $$AP = 8R \sin \frac{B}{3} \sin \frac{C}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{C}{3}\right)$$

Analog

(2) $$AN = 8R \sin \frac{B}{3} \sin \frac{C}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{B}{3}\right)$$

Teorema cosinusurilor în triunghiul APN permite calculul lui PN

$$PN^2 = AP^2 + AN^2 - 2AP \cdot AN \cos\frac{A}{3} =$$

$$= 64 R^2 \sin^2 \frac{B}{3} \sin^2 \frac{C}{3}\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{B}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{C}{3}\right) -\right.$$

$$\left. - 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{C}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{B}{3}\right)\cos \frac{A}{3}\right] =$$

$$= 64R^2 \sin^2\frac{B}{3}\sin^2\frac{C}{3}\left[\frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{6}-\frac{2C}{3}\right)}{2}\cdot\frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{6}-\frac{2B}{3}\right)}{2}\cdot\right.$$

$$\left.-\cos\frac{A}{3}\left[\cos\frac{\pi-B-C}{3}+\cos\frac{B-C}{3}\right]\right] =$$

$$= 64R^2 \sin^2\frac{B}{3}\sin^2\frac{C}{3}\left[1+\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B-C}{3}-\cos^2\frac{A}{3}-\right.$$

$$\left.-\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B-C}{3}\right] = 64R^2 \sin^2\frac{B}{3}\sin^2\frac{C}{3}\sin^2\frac{A}{3}$$

Aşadar, $PN = 8R \sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}$. Simetria în A, B şi C asigură că PMN este echilateral.

Notă importantă.

În articolul "Teorema reciprocă şi configuraţia lui Morley" din *GMB* 7/1983, academicianul Nicolae Teodorescu, îmbinînd în mod strălucit raţionamentul geometric cu cel algebric, stabileşte mai întîi următoarea reciprocă a teoremei lui Morley: "Fiind dat un triunghi echilateral DEF există un triunghi ABC şi numai unul cu unghiurile α, β, γ date, astfel încît trisectoarele acestuia să fie concurente două cîte două în vîrfurile D, E, F ale triunghiului echilateral dat."

Plecînd de la această reciprocă, se demonstrează apoi teorema directă. Metoda are avantajul că evaluează toate unghiurile ce intră în configuraţia Morley, în funcţie de unghiurile triunghiului.

b) În [27], problema 321 dă "*teorema completă a lui Morley*" în forma: "Să considerăm vîrfurile unui triunghi ABC notate în sens trigonometric. Pentru oricare două raze α, β simbolul (α, β) desmnează unghiul orientat pozitiv dintre α şi β. Să considerăm α_1 şi α'_1 două raze pornind din A pentru care $\sphericalangle(AB, \alpha_1) = \sphericalangle(\alpha_1, \alpha'_1) = \sphericalangle(\alpha'_1, AC) = \frac{\hat{A}}{3}$, α_2, α'_2 razele pentru care

$\sphericalangle(AB, \alpha_2) = \sphericalangle(\alpha_2, \alpha'_2) = \sphericalangle(\alpha'_2, AC) = \frac{1}{3}(\hat{A} + 2\pi)$ şi în final α_3 şi α'_3 razele pentru care $\sphericalangle(AB, \alpha_3) = \sphericalangle(\alpha_3, \alpha'_3) = \sphericalangle(\alpha'_3, AC) = \frac{1}{3}(\hat{A} + 4\pi)$.

(α_i, α'_i, $i = 1, 2, 3$ sînt numite trisectoare de tipul 1, 2, 3). În mod similar pentru vîrfurile B şi C determinăm β_j, β'_j şi γ_k, γ'_k ($j,k = 1, 2, 3$). Notăm cu $\alpha_i\beta_j\gamma_k$ triunghiul format prin intersectarea respectiv a razelor α_i şi β'_j, β_j şi γ'_k, γ_k şi α'_i. Dovediţi că pentru toţi i, j, k astfel că $i + j + k - 1$ nu este multiplu de trei, triunghiurile $\alpha_i\beta_j\gamma_k$ sînt echilaterale, iar laturile lor corespunzătoare sînt paralele şi vîrfurile se situează pe 9 linii drepte, cîte 6 pe fiecare linie."

CAPITOLUL 2

CONDIŢII NECESARE ŞI SUFICIENTE CA UN TRIUNGHI SĂ FIE ECHILATERAL

79. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, iar $A'B'C'$ triunghiul său ortic. Să se arate că dacă triunghiul $A'B'C'$ este echilateral, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Soluţie

Utilizînd patrulatere inscriptibile se deduce uşor că $\hat{A}' = 180^\circ - 2\hat{A}$, $\hat{B}' = 180^\circ - 2\hat{B}$, $\hat{C}' = 180^\circ - 2\hat{C}$. Egalitatea $\hat{A}' = \hat{B}' = \hat{C}'$ revine atunci la $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$, deci triunghiul ABC este echilateral.

80. Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathcal{C}(O; R)$. Bisectoarele interioare unghiurilor A, B, C retaie cercul $\mathcal{C}$ în punctele A', B', C'. Să se arate că dacă triunghiul $A'B'C'$ este echilateral, atunci triunghiul ABC este echilateral.

C. Cocea

Soluţie

Avem $\sphericalangle A'AC = \overset{\frown}{A'C}/2$, de unde $\overset{\frown}{A'C} = \hat{A}$

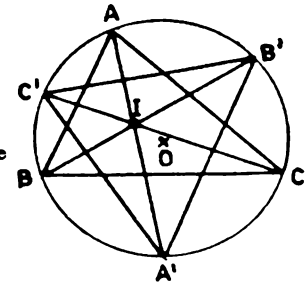
(1) $\widehat{A'B'} = \widehat{A'C} + \widehat{B'C} = \hat{A} + \hat{B}$

Triunghiul $A'B'C'$ fiind echilateral, urmează că $\widehat{A'B'} = \widehat{B'C'} = \widehat{C'A'}$.

Avînd în vedere (1) şi analoagele, rezultă:

$A + B = B + C = C + A$

de unde $A = B = C$ deci triunghiul ABC este echilateral.



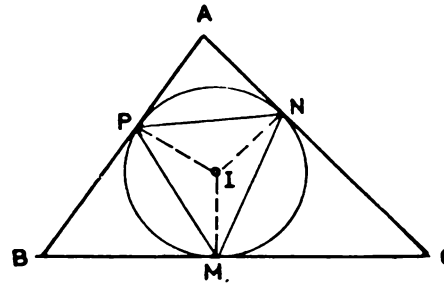
81. Fie ABC un triunghi oarecare, iar MNP triunghiul format de punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile triunghiului ABC. Să se arate că dacă triunghiul MNP este echilateral, atunci triunghiul ABC este echilateral.

C. Cocea

Soluţie

Fie I centrul cercului înscris triunghiului ABC. Deoarece $\sphericalangle API = 90°$ şi $\sphericalangle ANI = 90°$, patrulaterul $APIN$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle PIN = 180° - A$. Analog $\sphericalangle PIM = 180° - B$ şi $\sphericalangle MIN = 180° - C$. Cum $MN = NP = PN$, rezultă $\widehat{MN} = \widehat{PN} = \widehat{PM}$ deci şi $\sphericalangle PIM = \sphericalangle PIN = \sphericalangle MIN$, adică $180° - A = 180° - B = 180° - C$.

Rezultă $A = B = C$, deci triunghiul ABC este echilateral.



82. Fie ABC un triunghi, iar O, I, G centrul cercului circumscris, centrul cercului înscris, respectiv centrul de greutate al triunghiului.

Să se arate că :

a) Dacă triunghiul ABC este ascuţitunghic, iar cercurile circumscrise triunghiurilor OBC, OCA, OAB sînt congruente, atunci triunghiul ABC este echilateral.

b) Dacă cercurile circumscrise triunghiurile IBC, ICA, IAB sînt congruente, atunci triunghiul ABC este echilateral.

c) Dacă cercurile circumscrise triunghiurilor GBC, GCA, GAB sînt congruente, atunci triunghiul ABC este echilateral.

C. Cocea

Soluție

a) Fie R_1, R_2, R_3 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor OBC, OCA, OAB. Avem:

$R_1 = \frac{BC}{2 \sin \sphericalangle BOC} = \frac{BC}{2 \sin 2A} = \frac{2R \sin A}{2 \sin 2A} = \frac{R}{2 \cos A}$. Atunci egalitatea $R_1 = R_2 = R_3$ revine la: $\cos A = \cos B = \cos C$, adică $A = B = C$, deci ABC este triunghi echilateral.

b) Fie R'_1, R'_2, R'_3 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor IBC, ICA, IAB. Avem:

$$R'_1 = \frac{a}{\sin \sphericalangle BIC} = \frac{2R \sin A}{\sin(90^\circ + \frac{A}{2})} = \frac{2R \sin A}{\cos \frac{A}{2}} = 4R \sin \frac{A}{2}$$

Atunci: $R'_1 = R'_2 = R'_3 \Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} = \sin \frac{C}{2}$ deci $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$.

c) Fie R''_1, R''_2, R''_3 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor GBC, GCA, GAB.

Avem: $R''_1 = \frac{GB \cdot GC \cdot BC}{\sigma[GBC]}$

Dar $\sigma[GBC] = \frac{1}{3}\sigma[ABC]$, iar $GB = \frac{2}{3}m_a$, $GC = \frac{2}{3}m_b$, deci:

$R''_1 = \frac{4}{3}\frac{m_b m_c a}{S}$, unde $S = \sigma[ABC]$. Atunci:

$R''_1 = R''_2 \Leftrightarrow m_b \cdot m_c \cdot a = m_c \cdot m_a \cdot b$ sau

(*) $\frac{a}{m_a} = \frac{b}{m_b}$

Dacă presupunem că $a > b$, atunci $m_a < m_b$ și relația (*) este imposibilă.

La fel ajungem la contradicție dacă $a < b$.

Deci $a = b$. Analog obținem $b = c$.

83. Dacă în interiorul unui triunghi ABC există două puncte P și Q izotomice și izogonale, atunci triunghiul ABC este echilateral.

C. Cocea

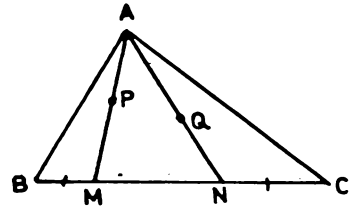
Soluție

Fie $\{M\} = AP \cap BC$ și $\{N\} = AQ \cap BC$. Dreptele AM și AN fiind izotomice, rezultă $BM = NC$. Dreptele AM și AN fiind izogonale, are loc relația lui Steiner: (1)

$$\frac{BM \cdot BN}{CM \cdot CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

Dar $BN = BC - CN = BC - BM = MC$.

Cum și $BM = CN$ din (1) rezultă, $\frac{AB^2}{AC^2} = 1$ adică $AB = AC$. La fel, deoarece dreptele BP și BQ sînt izotomice și izogonale, rezultă $AB = BC$. Deci triunghiul ABC este echilateral.



84. Să se arate că un triunghi este echilateral dacă este îndeplinită una din condițiile următoare:

a) medianele sînt proporționale cu laturile corespunzătoare;

b) înălțimile sînt proporționale cu laturile corespunzătoare;

c) bisectoarele sînt proporționale cu laturile corespunzătoare;

Soluție

Considerăm notațiile uzuale:

a) Fie $\frac{m_a}{a} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{c}$. Se știe că $a < b \Leftrightarrow m_a > m_b$. Să presupunem $a < b$. Rezultă $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ deci $\frac{m_a}{a} > \frac{m_a}{b} > \frac{m_b}{b}$ așadar $\frac{m_a}{a} > \frac{m_b}{b}$. Dacă presupunem $a > b$ rezultă analog

$\frac{m_a}{a} > \frac{m_b}{b}$. Deci $a = b$. Analog $b = c$, deci triunghiul este echilateral.

b) Din $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$, rezultă că $a < b \Leftrightarrow h_a > h_b$. Se face raționament analog ca la punctul a și rezultă că triunghiul este echilateral.

c) LEMĂ.

$a > b \Leftrightarrow l_a < l_b$. Avem $l_a^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} p(p-a)$

$$l_b^2 = \frac{4ac}{(a+c)^2} p(p-b)$$

Atunci: $l_a^2 - l_b^2 < 0 \Leftrightarrow \frac{b}{(b+c)^2}(-a+b+c) < \frac{a}{(a+c)^2}(a-b+c)$ sau

$b(a+c)^2(-a+b+c) - a(b+c)^2(a-b+c) < 0$ sau $b(-a^3 - a^2c + a^2b + 2abc + bc^2 + a^2c + 2ac^2 + c^3) - a(-b^3 - b^2c + ab^2 + 2abc + ac^2 + b^2c + 2bc^2 + c^3) < 0$ sau încă:

$ab(-a^2 + b^2) + abc(-a + b) + 2abc(b - a) + c^2(b^2 - a^2) + abc(b - a) + c^3(b - a) < 0$.

Așadar, inegalitatea revine la:

$(b - a)[ab^2 + ac^2 + abc + 2abc + c^2b + c^2a + abc + c^3] < 0$,

evidentă deoarece paranteza pătrată este strict pozitivă. Avînd în vedere lema și făcînd un raționament analog cu punctul a) rezultă afirmația că triunghiul este echilateral.

85. Fie ABC un triunghi de laturi a, b, c. Să se arate că ABC este echilateral, dacă sînt îndeplinite oricare din condițiile:

(1) laturile a, b, c (în această ordine) sînt în progresie aritmetică.

(2) laturile a, b, c sînt în progresie geometrică.

(3) laturile a, b, c sînt în progresie armonică.

Soluție

(1) + (2). Avem: $b = \frac{a+c}{2}$ și $b^2 = ac$, de unde $\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = ac$ sau $a^2 + b^2 + 2ac = 4ac$

$\Leftrightarrow (a - c)^2 = 0 \Leftrightarrow a = c$; dar $b = \frac{a+c}{2} = \frac{2a}{2} = a$.

(2) + (3). $b^2 = ac$ şi $b = \frac{2ac}{a+c}$, de unde $\frac{4a^2c^2}{(a+c)^2} = ac \Leftrightarrow \frac{4ac}{(a+c)^2} = 1 \Leftrightarrow (a - c)^2 = 0 \Leftrightarrow a = c$.

(1) + (3). $b = \frac{a+c}{2}$, $b = \frac{2ac}{a+c}$ rezultă $\frac{a+c}{2} = \frac{2ac}{a+c} \Leftrightarrow (a-c)^2 = 0 \Leftrightarrow a = c$.

86. În triunghiul ABC se consideră bisectoarele $[AD$, $[BE$, $[CF$, unde $D \in (BC)$, $E \in (CA)$ şi $F \in (AB)$. Să se demonstreze că dacă pentru orice punct M din planul triunghiului $M \neq D, E, F$, paralelele din A, B, C respectiv la MD, ME şi MF sînt concurente, atunci triunghiul este echilateral.
Reciproca este adevărată?

D. M. Bătineţu-Giurgiu şi I. Savu

Soluţie

Să considerăm $M \equiv A$. Paralela din A la AD este chiar DA. Paralela din B la AE este paralela din B la AC, iar paralela din C la AF este paralela din C la AB. Conform enunţului, aceste paralele sînt concurente în A' de unde, dacă ţinem seama de modul de construcţie, rezultă $ABA'C$ paralelogram şi atunci $[BC]$ şi $[AA']$ se înjumătăţesc. Deoarece $(BC) \cap (AA') = \{D\}$, deducem că D este mijlocul lui $[BC]$ adică AD este mediană şi bisectoare deci $AB = AC$. Analog, luînd $M \equiv B$ rezultă $BA = BC$. Deci ABC este echilateral.
Reciproc. Triunghiul EDF este omotetic cu ABC de centru O şi raport - 1/2. Rezultă că paralelele la MC, MA, MB sînt concurente în omoteticul lui M faţă de omotetia de centru O şi raport - 1/2.

87. Fie A', B', C' respectiv picioarele bisectoarelor interioare ale unghiurilor A, B, C ale triunghiului ABC. Dacă $(A'B) \equiv (B'C) \equiv (C'A)$ să se demonstreze că triunghiul este echilateral.

Mircea Lascu

Soluţie

Notăm $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Din teorema bisectoarei obţinem:

$A'B = a\frac{c}{b+c}$; $B'C = a\frac{b}{a+c}$; $C'A = b\frac{c}{a+b}$. Condiţia din enunţ implică:

(1) $c^2 - b^2 = c(b - a)$
(2) $a^2 - c^2 = a(b - c)$
(3) $b^2 - a^2 = b(a - c)$

Fără a restrînge generalitatea putem presupune $a \leq b \leq c$. Atunci, din relaţia (3) rezultă
$b = a$ şi $a = c$, deoarece $b^2 - a^2 \geq 0$ şi $b(a - c) \leq 0$ şi egalitatea se obţine numai dacă $b^2 - a^2 = 0$ şi $b(a - c) = 0$. Deci triunghiul ABC este echilateral.

88. Dacă există un punct M în interiorul unui triunghi ABC astfel ca triunghiurile AMB, BMC, CMA să aibă aceeaşi arie şi acelaşi perimetru, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Marcel Chiriţă

Soluție

Este știut faptul că dacă triunghiurile MAB, MBC, MCA au aceeași arie atunci $M \equiv G$ - centrul de greutate al triunghiului. Să presupunem că $a \leq b \leq c$ (1). Din condiția din enunț rezultă că trebuie să avem:

(2) $\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b + c = \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_c + b = \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c + a$

unde m_a, m_b, m_c sînt medianele triunghiului.

Din (2) și (1) avem:

$2(m_b - m_c) = 3(b - c) \leq 0$ deci $m_b \leq m_c$

$2(m_a - m_c) = 3(a - c) \leq 0$ deci $m_a \leq m_c$

$2(m_a - m_b) = 3(a - b) \leq 0$ deci $m_a \leq m_b$

Prin urmare

(3) $m_a \leq m_b \leq m_c$

Dar se știe că într-un triunghi la latura mai mare corespunde mediana mai mică. Deci, dacă $a < b$ atunci $m_a > m_b$, ceea ce contrazice (3). Așadar, din (1) și (3) rezultă că neapărat

$a = b = c$, deci triunghiul ABC este echilateral.

89. Fie H ortocentrul triunghiului ascuțitunghic ABC. Dacă ABH, BCH și CAH sînt triunghiuri cu perimetrele egale, atunci triunghiul ABC este echilateral.

E. Constantinescu

Soluție

Se știe că $AH = 2R\cos A$, $BH = 2R\cos B$ și $CH = 2R\cos C$. Dacă triunghiurile AHB și BHC au perimetrele egale rezultă: $2R\cos A + c = 2R\cos C + a \Leftrightarrow \cos A + \sin C = \cos C + \sin A \Leftrightarrow 2\sin\frac{A-C}{2}\left(\sin\frac{A+C}{2} + \cos\frac{A+C}{2}\right) = 0$.

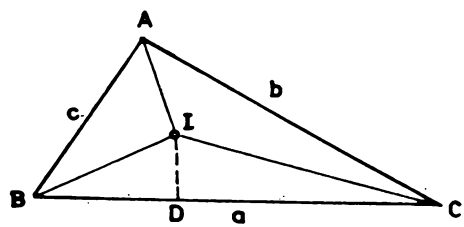
Deoarece ABC este ascuțitunghic, paranteza de mai sus este strict pozitivă, deci $\sin\frac{A-B}{2} = 0$, deci $\hat{A} = \hat{C}$. Analog $\hat{B} = \hat{C}$. Deci ABC este echilateral.

90. Fie ABC un triunghi, iar I centrul cercului înscris. Dacă triunghiurile IAB, IBC, ICA au același perimetru, atunci triunghiul ABC este echilateral.

C. Cocea

Soluție

Fie D punctul de tangență al cercului cu latura BC. Din triunghiul dreptunghic IBD avem:



$IB = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}}$. Analog $IC = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$ și

$IA = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$. Avem: $P_{AIB} = P_{AIC} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c + \frac{r}{\sin\frac{B}{2}} = b + \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$ sau

(1) $b - c = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\left(\sin\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\right)$

Dacă presupunem $b > c$ cum funcţia $\sin\frac{x}{2}$ $(x \in (0, \pi))$ este strict crescătoare, rezultă că $\sin\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2} < 0$ şi atunci (1) este imposibilă, deoarece membrul stîng este strict pozitiv, iar membrul drept strict negativ. Analog se ajunge la contradicţie dacă b < c. Deci $b = c$. Din $P_{AIB} = P_{BIC}$ rezultă $c = a$. Deci triunghiul ABC este echilateral.

91. Fie ABC un triunghi, iar D, E, F punctele de contact ale cercului înscris cu laturile BC, CA, AB. Dacă triunghiurile AEF, BFD şi CDE au acelaşi perimetru, atunci triunghiul ABC este echilateral.

C. Cocea

Soluţie

Fie $\{M\} = AI \cap FE$.

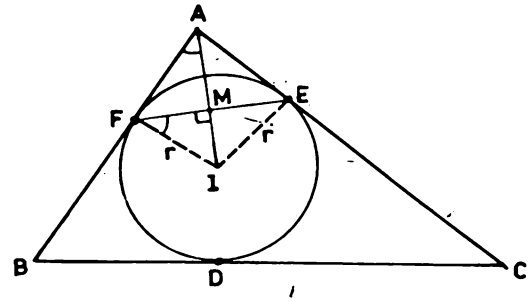
Avem $\sphericalangle IFM = \sphericalangle IAF = \frac{\hat{A}}{2}$. Deci $FM = r\cos\frac{A}{2}$, de unde

(1) $EF = 2r\cos\frac{A}{2}$

Analog

(2) $DE = 2r\cos\frac{B}{2}$

(3) $DF = 2r\cos\frac{C}{2}$



Se ştie că $AE = AF = p - a$ şi analoagele.

$P_{AFE} = P_{BFD} \Leftrightarrow 2(p - a) + 2r\cos\frac{A}{2} = 2(p - b) + 2r\cos\frac{B}{2}$

sau

(4) $$b - a = r\left(\cos\frac{B}{2} - \cos\frac{A}{2}\right)$$

Dacă presupunem $b > a$, rezultă $\cos\frac{B}{2} < \cos\frac{A}{2}$. Analog dacă $b < a$, rezultă $\cos\frac{B}{2} > \cos\frac{A}{2}$ (deoarece $\cos\frac{x}{2}$ cu $x \in (0, \pi)$ este strict descrescătoare). Deci (4) se realizează numai cînd $a = b$. Analog $P_{BFD} = P_{CDE}$ implică $b = c$. Deci triunghiul ABC este echilateral.

92. Fie ABC un triunghi, iar T_1, T_2, T_3 punctele de tangenţă ale cercurilor exînscrise cu laturile BC, CA respectiv AB. Dacă triunghiurile AT_2T_3, BT_1T_3 şi CT_1T_2 au aceeaşi arie, atunci triunghiul ABC este echilateral.

C. Cocea

Soluţie

Se ştie că dacă a, b, c sînt laturile triunghiului, atunci: $T_1B = p - c$, $T_1C = p - b$, $T_2C = p - a$, $T_2A = p - c$, $T_3A = p - b$ şi $T_3B = p - a$. Atunci: $2\sigma[BT_1T_3] = 2\sigma[CT_1T_2] \Leftrightarrow$

(1) $(p - a)(p - c)\sin B = (p - b)(p - a)\sin C$

sau

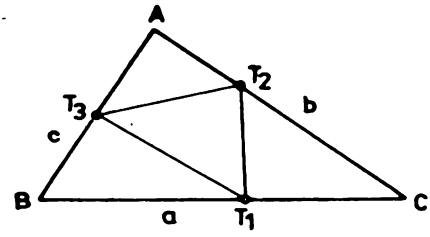
(2) $(p - c)\dfrac{b}{2R} = (p - b)\dfrac{c}{2R}$

de unde

(3) $pb - bc = pc - bc$, sau:

(4) $p(b - c) = 0 \Leftrightarrow b = c$

Analog se obţine $a = c$. Deci $a = b = c$, prin urmare triunghiul ABC este echilateral.



93. Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathcal{C}(O; R)$, iar A', B', C' punctele diametral opuse lui A, B, C. Să se arate că :

a) Dacă triunghiurile $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ au acelaşi perimetru, atunci triunghiul ABC este echilateral.

b) Dacă triunghiurile $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ au aceeaşi arie, atunci triunghiul ABC este echilateral.

C. Cocea

Soluţie

Avem: $P_{A'BC} = 2R\sin A + 2R\sin(90° - B) + 2R\sin(90° - C)$. Deci

(1) $P_{A'BC} = 2R(\sin A + \cos B + \cos C)$

Analog obţinem încă două relaţii. Atunci $P_{A'BC} = P_{B'CA} \Leftrightarrow$ (*) $\cos B - \cos A = \sin B - \sin A$

Dar (*) este echivalentă cu:

(2) $2\sin\dfrac{B-A}{2}\left(\cos\dfrac{B+A}{2} + \sin\dfrac{B+A}{2}\right) = 0$

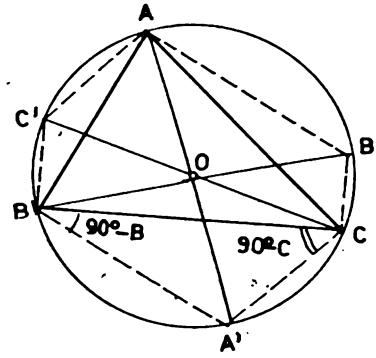
sau

(3) $2\sin\dfrac{B-A}{2}\left(\sin\dfrac{C}{2} + \cos\dfrac{C}{2}\right) = 0$

de unde $A = B$.

Analog, $B = C$, deci triunghiul ABC este echilateral.

b) Avem: $\sigma[A'BC] = 2R^2\sin(180° - A)\sin(90° - B)\cdot\sin(90° - C) = 2R^2\sin A\cos B\cos C$



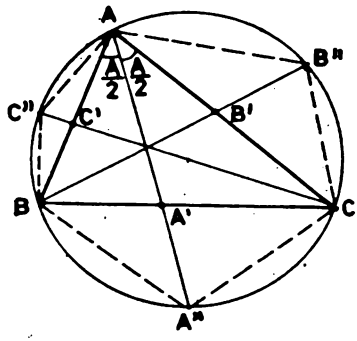
Atunci: $\sigma[A'BC] = \sigma[B'AC] \Leftrightarrow \cos C(\sin A\cos B - \cos A\sin B) = 0$
sau
(4) $\cos C \sin(A - B) = 0$
Rezultă $A - B = 0$ sau $C = 90°$. Cînd $C = 90°$, rezultă $B' \equiv A$ şi $A' \equiv B$ şi egalitatea de la punctul b) este imposibilă. Deci (5) $A = B$.
Analog $B = C$, deci triunghiul ABC este echilateral.

94. Fie ABC un triunghi, iar A'', B'', C'' punctele în care bisectoarele interioare AA', BB', CC' taie a doua oară cercul $\mathcal{C}(O; R)$ circumscris triunghiului. Dacă triunghiurile $A''BC$, $B''CA$, $C''AB$ au acelaşi perimetru, atunci triunghiul ABC este echilateral.

C. Cocea

Soluţie

Avem $A''B = A''C = 2R \sin\frac{A}{2}$, iar $BC = 2R \sin A$.



Prin urmare: $P_{A''BC} = P_{B''CA} \Leftrightarrow 2R(\sin A + 2\sin\frac{A}{2}) =$

$= 2R(\sin B + 2\sin\frac{B}{2})$

sau

(1) $a - b = 4R(\sin\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2})$.

Dacă $a > b$ rezultă $\sin\frac{B}{2} < \sin\frac{A}{2}$ şi egalitatea (1) este imposibilă. Analog dacă $a < b$. Deci (1) este dacă şi numai dacă $a = b$. La fel ajungem la concluzia $b = c$. Deci triunghiul ABC este echilateral.

95. Fie ABC un triunghi, iar D, E, F punctele de contact ale cercului înscris cu laturile BC, CA respectiv AB. Să se arate că dacă triunghiurile AEF, BFD şi CDE au aceeaşi arie, atunci triunghiul ABC este echilateral.

C. Cocea

Soluţie

Avem $BD = p - b$, $BF = p - b$, $DC = p - c$, $CE = p - c$, unde a, b, c sînt laturile triunghiului. Avem: $\sigma[BDF] = \sigma[CDE] \Leftrightarrow (p - b)^2 \sin B = (p - c)^2 \sin C$. Avînd în vedere teorema sinusurilor, putem scrie:

(1) $$(p - b)^2 \cdot b = (p - c)^2 \cdot c$$

Relaţia (1) este echivalentă cu:

(2) $$(b - c)[p^2 - 2p(b + c) + b^2 + c^2 + bc] = 0$$

Rezultă $b = c$ sau $p^2 - 2p(b + c) + b^2 + c^2 + bc = 0$.
Vom arăta că a doua relaţie este imposibilă. Privim a doua relaţie ca o ecuaţie de grad 2 în p. Cum $\Delta' = bc$, avem: $p_{1,2} = b + c \pm \sqrt{bc}$. Dacă $p = b + c + \sqrt{bc}$, rezultă $a + b + c = 2b + 2c + c\sqrt{bc}$ sau $a = b + c + 2\sqrt{bc}$. Dar $a < b + c$, deci

egalitatea este imposibilă. Dacă $p = b + c - \sqrt{bc}$, rezultă $a = b + c - 2\sqrt{bc}$, sau $a = (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2$, de unde

$\sqrt{a} = \sqrt{b} - \sqrt{c}$ sau $\sqrt{a} = \sqrt{c} - \sqrt{b}$. Dacă $\sqrt{a} = \sqrt{b} - \sqrt{c}$, urmează $\sqrt{a} + \sqrt{c} = \sqrt{b}$,

de unde $a + c + 2\sqrt{ac} = b$, contradicție, deoarece $a + c > b$. Analog în cazul cînd $\sqrt{a} = \sqrt{c} - \sqrt{b}$.

96. Să se arate că dacă $\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_c}$, atunci triunghiul ABC este echilateral, unde a, b, c și s_a, s_b, s_c sînt laturile, respectiv simedianele triunghiului ABC.

C. Cocea și D. Geba

Soluție

Se știe că $s_a = \frac{2bc}{b^2 + c^2} m_a$. Egalitatea $\frac{a^2}{s_a^2} = \frac{b^2}{s_b^2}$ este echivalentă cu:

(1) $\frac{a^2(b^2 + c^2)^2}{4b^2c^2m_a^2} = \frac{b^2(a^2 + c^2)^2}{4a^2c^2m_b^2}$ sau:

(2) $a^2(b^2 + c^2)a^2m^2_b = b^2(a^2 + c^2)^2b^2m^2_a$

Deci:

(3) $(a^2b^2 + a^2c^2)^2\left[\frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}\right] = (b^2a^2 + b^2c^2)^2\left[\frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}\right]$

Obținem:

(4) $3a^4b^4(a^2 - b^2) + 2c^4(a^6 - b^6) + 4a^2b^2c^2(a^4 - b^4) + 2c^6(a^4 - b^4) + 3a^2b^2c^4(a^2 - b^2) = 0$

sau:

(5) $(a^2 - b^2)[3a^4b^4 + 2c^4(a^4 + a^2b^2 + b^4) + 4a^2b^2c^2(a^2 + b^2) + 2c^6(a^2 + b^2) + 3a^2b^2c^4] = 0$

Cum paranteza pătrată este strict pozitivă, rezultă $a^2 - b^2 = 0$, deci $a = b$. Analog $b = c$. Deci triunghiul ABC este echilateral.

97. Fie ABC un triunghi și punctele T_a, T_b, T_c de tangență ale cercurilor exînscrise triunghiului ABC, cu laturile BC, CA, AB. Arătați că dacă triunghiurile AT_bT_c, BT_cT_a, CT_aT_b au același perimetru, atunci triunghiul ABC este echilateral.

C. Cocea și D. Geba

Soluție

Este cunoscut faptul că $BT_a = AT_b = p - c$,

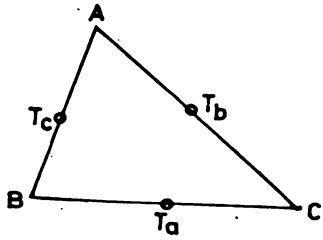
$AT_c = CT_a = p - b$, $BT_c = CT_b = p - a$. Rezultă: $BT_c + BT_a = b$ și $CT_b + CT_a = c$. Vom arăta acum că pentru $b \geq c$ avem $T_aT_c \geq T_aT_b$, deci egalitatea perimetrelor triunghiurilor BT_aT_c și CT_aT_b se realizează cînd $b = c$.

Avem:

$T_aT^2_c = (p - a)^2 + (p - c)^2 - 2(p - a)(p - c)\cos B$

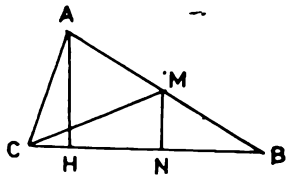
$T_aT^2_b = (p - a)^2 + (p - b)^2 - 2(p - a)(p - b)\cos C$

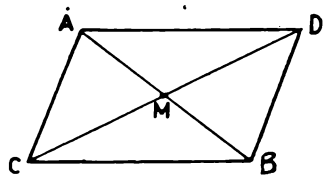
Deci:
$T_aT_c^2 - T_aT_b^2 =$
$= (b - c)a + 2(p - a)[(p - b)\cos C - (p - c)\cos B] = (b - c)a + (p - a)\left[\frac{(a+c-b)(a^2+b^2+c^2)}{2ab} - \frac{(a+b-c)(a^2+c^2-b^2)}{2ac}\right] =$
$= \frac{(b - c)}{4abc}[(b + c - a)(b + c)(b - c)^2 + a(b + c)^2(b + c - a) + a^2(a^2 - (b - c)^2)] = (b - c)K$
cu $K > 0$ deoarece $a^2 > (b - c)^2$.
Deci $b > c$ implică $T_aT_c > T_aT_b$, deci. $P_{BT_aT_c} > P_{CT_aT_b}$ Cum perimetrele triunghiurilor BT_aT_c şi CT_aT_b sînt egale, rezultă că $b = c$. Analog $a = c$.
Deci, triunghiul ABC este echilateral.



98. Dacă într-un triunghi ABC avem $h_a = l_b = m_c$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Soluţie





Avem $h_a = l_b \geq h_b \Rightarrow a \leq b$; $m_c = l_b \leq m_b \Rightarrow b \leq c$. Deci $a \leq b \leq c$ prin urmare (*) $C = \max\{A, B, C\}$
Vom demonstra că $C \leq 60°$ şi atunci din (*) rezultă că neapărat ABC trebuie să fie echilateral Fie H piciorul înălţimii din A, M mijlocul lui AB iar N proiecţia lui M pe BC.
$\left.\begin{matrix} AH \perp BC \\ MN \perp BC \end{matrix}\right\}$ $MN \parallel AH \Rightarrow MN$ este linie mijlocie în triunghiul CMB,
deci $MN = \frac{AH}{2}$.
Cum $AH = CM$, rezultă, $MN = \frac{CM}{2}$ deci $\sphericalangle MCN = 30°$. Fie D simetricul lui C faţă de AB. Avem $BC = \min(a, b, c)$. Dar $AD = BC < AC$. Rezultă $\sphericalangle ACD < \sphericalangle CDA = 30°$ şi atunci $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD + \sphericalangle MCB < 30° + 30° = 60°$. Cu aceasta, afirmaţia este demonstrată.

99. În triunghiul ABC bisectoarele interioare AA', BB', CC' seintersectează în I. Să se arate că dacă: $\max\left\{\frac{IA'}{AA'}, \frac{IB'}{BB'}, \frac{IC'}{CC'}\right\} = \frac{1}{3}$ atunci triunghiul ABC este echilateral.

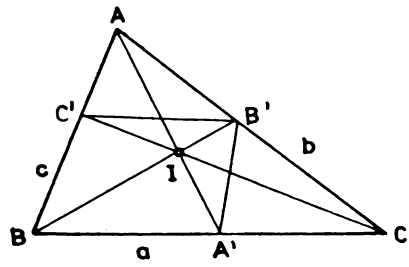
D.M. Bătineţu Giurgiu

Soluţie

Cu notaţiile obişnuite, aplicînd teorema bisectoarei, obţinem: $\frac{BA'}{A'C} = \frac{c}{b}$

de unde $BA' = \frac{ac}{b+c}$. Apoi, tot din teorema bisectoarei: $\frac{IA'}{IA} = \frac{BA'}{BA} = \frac{a}{b+c}$ deci

(1) $\frac{IA'}{AA'} = \frac{a}{2p}$



Din (1) şi analoagele rezultă: $\sum \frac{IA'}{AA'} = 1$.

Fie $\frac{IA'}{AA'} = \max\left\{\frac{IA'}{AA'}, \frac{IB'}{BB'}, \frac{IC'}{CC'}\right\} = \frac{1}{3}$

Rezultă $\frac{IB'}{BB'} + \frac{IC'}{CC'} = \frac{2}{3}$ deci $\frac{IB'}{BB'} \le \frac{1}{3}$ şi $\frac{IC'}{AA'} \le \frac{1}{3}$

Dacă, prin absurd $\frac{IB'}{BB'} < \frac{1}{3}$, atunci $\frac{IB'}{BB'} + \frac{IC'}{CC'} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Deci, $\frac{IB'}{BB'} = \frac{IC'}{CC'} = \frac{1}{3}$.

Atunci $\frac{IB'}{IB} = \frac{IC'}{IC} = \frac{1}{2}$ şi triunghiurile $IB'C'$ şi IBC sînt asemenea ($B'C' \parallel BC$ şi raport de asemănare 1/2). Cum $B'C' \parallel BC$ şi $\frac{B'C'}{BC} = \frac{1}{2}$ rezultă că $B'C'$ este linie mijlocie în ΔABC, deci BB' şi CC' sînt mediane. Rezultă $I \equiv G$ - centrul de greutate, deci triunghiul ABC este echilateral.

Soluţia a II-a.

Din (1) $\frac{IA'}{AA'} = \frac{a}{a+b+c}$ şi analog

$\frac{IB'}{BB'} = \frac{b}{a+b+c}$; $\frac{IC'}{CC'} = \frac{c}{a+b+c}$, ţinînd cont de ipoteza problemei, rezultă că, $\frac{a}{a+b+c} \le \frac{1}{3}$ adică $2a \le b + c$ şi analoagele $2b \le a + c$, $2c \le a + b$. Adunînd ultimele relaţii, obţinem $2a + 2b + 2c \le 2a + 2b + 2c$. Rezultă că $2a = b + c$, $2b = a + c$, $2c = a + b$,

de unde scăzînd primele două relaţii, rezultă $a = b$, şi scăzînd ultimele două rezultă $b = c$, adică triunghiul ABC este echilateral.

100. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, iar $M \in \{ O, I, H, K, \Gamma, N, T, \Omega \}$ unde punctele din acoladă sînt respectiv centrul cercului circumscris, centrul cercului înscris, ortocentrul, punctul Lemoine, punctul Gergone, punctul Nagel, punctul Torricelli şi unul din cele două puncte Brocard. Notăm cu $\{A'\} = MA \cap BC$, $\{B'\} = MB \cap AC$ şi $\{C'\} = MC \cap BC$. Dacă

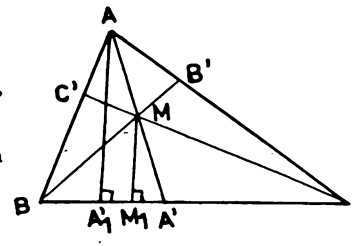
$$\max\left\{\frac{MA'}{AA'}, \frac{MB'}{BB'}, \frac{MC'}{CC'}\right\} = \frac{1}{3}$$ atunci triunghiul ABC este echilateral.

C. Cocea

Soluţie

Vom demonstra mai întîi relaţia cunoscută

(1) $\dfrac{MA'}{AA'} + \dfrac{MB'}{BB'} + \dfrac{MC'}{CC'} = 1$



Fie d_a şi h_a distanţele de la M şi A la BC, avem:

(2) $\dfrac{MA'}{AA'} = \dfrac{d_a}{h_a}$ din asemănarea triunghiurilor MM_1A' şi $A'AA_1$. Dar

$$d_a = \frac{2\,\sigma[MBC]}{BC} \quad \text{şi} \quad h_a = \frac{2\,\sigma[ABC]}{BC}$$

Înlocuind în (2) obţinem

(3) $\dfrac{MA'}{AA'} = \dfrac{\sigma[MBC]}{\sigma[ABC]}$

Scriind încă două relaţii analoage şi sumîndu-le, rezultă relaţia (1). Avînd în vedere condiţia din enunţ şi relaţia (1), rezultă că trebuie neapărat ca $\dfrac{MA'}{AA'} = \dfrac{MB'}{BB'} = \dfrac{MC'}{CC'} = \dfrac{1}{3}$. Locul geometric al punctelor pentru care $\dfrac{MA'}{AA'} = \dfrac{1}{3}$ este o paralelă la BC dusă prin G. Analog, M se mişcă pe o paralelă la CA dusă prin G, deci $M \equiv G$. Dar se poate demonstra uşor că dacă centrul de greutate coincide cu O, I, H, K, Γ, N, T sau Ω atunci triunghiul ABC este echilateral.

Observaţie.

Pentru punctele I, K, Γ, N, Ω rezultatul este valabil pentru un triunghi oarecare fără restricţie să fie ascuţitunghic, deoarece I, K, Γ, N, Ω sînt puncte interioare oricărui triunghi. Restricţia ca triunghiul să fie ascuţitunghic s-a impus pentru O, H şi T.

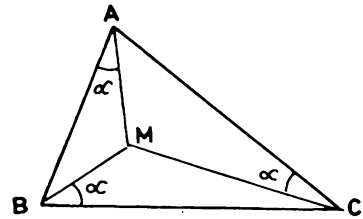
101. Punctul M se află în interiorul triunghiului ABC astfel încît unghiurile MAB, MBC, MCA sînt congruente. Se cere:

a) Să se determine M printr-o construcţie grafică.

b) Să se arate că dacă triunghiurile MAB, MBC, MCA au aceeaşi arie atunci triunghiul ABC este echilateral.

Soluţie

Punctul M aparţine cercului ce trece prin A şi este tangent laturii BC în B. Analog, M aparţine cercului care trece prin C şi este tangent în A laturii AC. El este, deci, cel de-al doilea punct comun al celor două cercuri. Observăm că în triunghiul AMB avem:



$\sphericalangle AMB = 180^\circ - [\alpha + (\hat{B} - \alpha)] = 180^\circ - \hat{B}$

Din teorema sinusurilor rezultă:

$$\frac{MB}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin B} \quad \text{adică} \quad MB = \frac{c\sin\alpha}{\sin B}$$

Analog $MA = \dfrac{b\sin\alpha}{\sin A}$. Atunci:

$$(1)\ \sigma[AMB] = \frac{MA \cdot MB \sin \sphericalangle AMB}{2} = \frac{bc\sin^2\alpha}{\sin A}$$

Dar dinî, $\sigma[ABC] = \dfrac{bc\sin A}{2} = S$ exprimînd bc şi înlocuind în (1), rezultă:

$$(2) \qquad \sigma[AMB] = S\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 A}$$

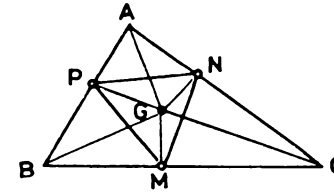
Scriind încă două relaţii analoage cu (2), condiţia din enunţ revine la: $\sin A = \sin B = \sin C$, adică triunghiul ABC este echilateral.

102. Să se arate că dacă triunghiul podar corespunzător centrului de greutate al unui triunghi $AB\hat{C}$ este echilateral, atunci triunghiul ABC este echilateral.

C. Cocea

Soluţie

Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC, iar M, N, P proiecţiile lui G pe laturi. Deoarece



$\sphericalangle APG = \sphericalangle ANG = 90^\circ$, patrulaterul $APGN$ este inscriptibil, în cercul de diametru GA. Rezultă că

$PN = GA\cdot\sin A =$

$= \dfrac{2}{3} m_a \sin A = \dfrac{2}{3}\dfrac{am_a}{2R} = \dfrac{am_a}{3R}$, unde R este raza

cercului circumscris triunghiului ABC.

Egalităţile $PN = PM = MN$ revin la:

$(1) am_a = bm_b = cm_c$

Din $am_a = bm_b$ prin ridicare la pătrat şi ţinînd seama de formula medianei rezultă

$(2)\quad a^2[2(b^2 + c^2) - a^2] = b^2[2(a^2 + c^2) - b^2]$ sau:

$(3)\quad 2c^2(a^2 - b^2) = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$

de unde rezultă:

(i) $a = b$ sau

(ii) $a^2 + b^2 = 2c^2$

Analog din $bm_b = cm_c$ rezultă:

(iii) $b = c$ sau

(iv) $b^2 + c^2 = 2a^2$

Se constată uşor că din *(i)* + *(iii)* sau *(i)* + *(iv)* sau *(ii)* + *(i)* sau *(ii)* + *(iv)* rezultă $a = b = c$.

103. Dintre toate triunghiurile înscrise într-un acelaşi cerc, triunghiul pentru care suma pătratelor distanţelor de la ortocentru la mijloacele laturilor este minimă, este un triunghi echilateral.

Şt. Nicolescu, GM XXIX

Soluţie

Fie a, b, c laturile triunghiului, A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor, O centrul cercului circumscris, iar R raza. Aplicînd teorema medianei, la fiecare din triunghiurile cu vîrful H şi ca laturi laturile triunghiului, obţinem:

$$HA^2_1 + HB^2_1 + HC^2_1 = HA^2 + HB^2 + HC^2 - 1/4(a^2 + b^2 + c^2)$$

Dar conform relaţiei lui Leibniz,

$$HA^2 + HB^2 + HC^2 = 3HG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

Astfel:

$$HA^2_1 + HB^2_1 + HC^2_1 = 12R^2 - 5/4(a^2 + b^2 + c^2)$$

Avînd în vedere că:

$$HO^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

se obţine:

$$HA^2_1 + HA^2_2 + HA^2_3 = \frac{(3R^2 + 5HO^2)}{4}$$

Cum R = constant, suma este minimă cînd $HO = 0$, adică $H \equiv O$, deci triunghiul ABC este echilateral.

104. Să se demonstreze că un triunghi este echilateral dacă şi numai dacă are acelaşi centru ca şi triunghiul ortic.

C. Moldovan

Soluţie

Dacă triunghiul ABC este echilateral, atunci este evident că şi triunghiul ortic are acelaşi centru de greutate.

Reciproc.

Fie G centrul de greutate al lui ABC, iar $A'B'C'$ triunghiul ortic. Avem:

(1) $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$

(2) $\vec{GA'} + \vec{GB'} + \vec{GC'} = 0$

Cum $\vec{AA'} = \vec{GA'} - \vec{GA}$ şi analoagele avem:

(3) $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = 0$

Ridicînd (3) la pătrat, obţinem:

(4) $AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 + 2\vec{AA'}\vec{BB'} + 2\vec{AA'}\vec{CC'} + 2\vec{BB'}\vec{CC'} = 0$

sau

(5) $h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 - 2h_ah_b\cos C - 2h_ah_c\cos B - 2h_bh_c\cos C = 0$

Dar $h_a = \frac{2S}{a}$, $h_b = \frac{2S}{b}$, $h_c = \frac{2S}{c}$

Înlocuind în (5) şi avînd în vedere şi teorema cosinusurilor, obţinem:

$$4S^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) - 8S^2\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a^2b^2}+\frac{a^2-b^2+c^2}{2a^2c^2}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2b^2c^2}\right) = 0$$

sau: împărţind prin $4S^2$ şi eliminînd numitorii, obţinem:

(6) $a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 = 0$

De unde:

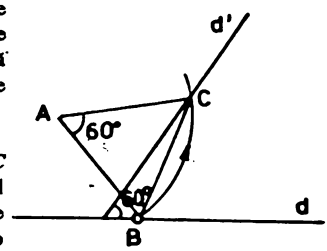
(7) $1/2[(a^2 - b^2) + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2] = 0$

Din (7) rezultă $a = b = c$, deci triunghiul ABC este echilateral.

CAPITOLUL 3

PROBLEME DE CONSTRUCŢII GEOMETRICE ŞI LOCURI GEOMETRICE

105. Se dă un punct fix A şi o dreaptă d. Se uneşte A cu un punct B al dreptei d şi se construieşte triunghiul echilateral ABC. Să se afle locul geometric al lui C cînd B se mişcă pe d.



Soluţie

Oricare ar fi B pe d se poate trece de la B la C printr-o rotaţie de 60° în jurul lui A, deci locul lui C este transformata lui d prin această rotaţie adică o dreaptă d'. Analog obţinem încă o dreaptă cînd rotaţia se face în sens invers.

106. Să se construiască un triunghi echilateral ABC care are vîrful A dat, iar vîrfurile B și C să fie așezate:

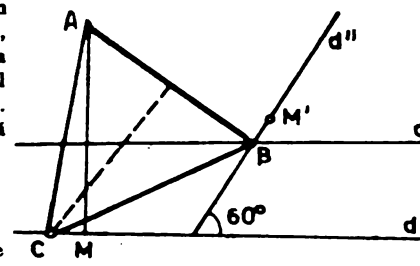
a) pe două drepte paralele d, d'

b) pe o dreaptă d și un cerc (ω) dat.

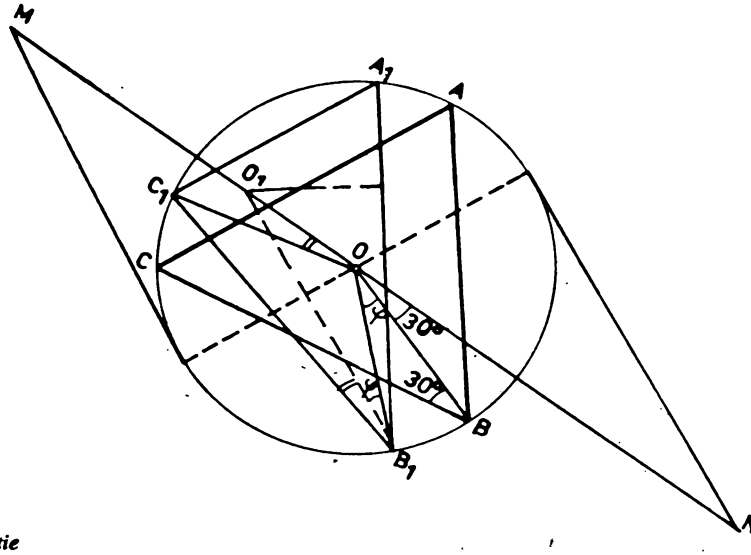
Soluție

a) Fie $M \in d'$ oarecare. Rotim dreapta d' (în sens trigonometric), cu $60°$ în jurul lui A, intersecția transformatei d'' cu d dă un vîrf al triunghiului. Deci mărimea laturii. Rotind în sens invers obținem altă soluție.

b) Analog ca la punctul a).



107. Un triunghi echilateral este înscris într-un cerc. Găsiți locul geometric al ortocentrului triunghiului înscris în același cerc cu două laturi ale sale paralele cu cele ale triunghiului inițial dat.



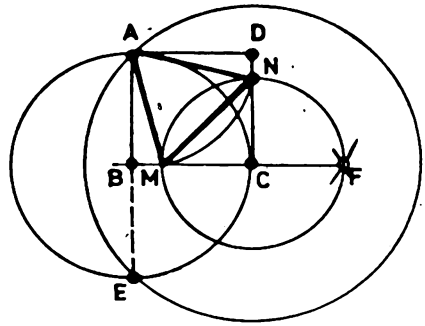
Soluție

Fie ABC triunghiul echilateral inițial, $A_1B_1C_1$ un triunghi cu $A_1C_1 \parallel AC$, $A_1B_1 \parallel AB$, O centrul cercului, O_1 ortocentrul triunghiului $A_1B_1C_1$. Considerăm $\sphericalangle BOB_1 = \varphi$. Cum $O_1B_1 \parallel OB \Rightarrow \sphericalangle OB_1O_1 = \varphi$ Dar: $\sphericalangle C_1OB_1 = \sphericalangle C_1O_1B_1 = 120°$ rezultă $C_1O_1OB_1$ patrulater inscriptibil, rezultă în continuare $\sphericalangle O_1OC_1 = \sphericalangle O_1B_1C_1 = 30° - \varphi$.

Aşadar, $\sphericalangle O_1OB = \varphi + 120° + 30° - \varphi = 150°$. Rezultă că $OO_1 // BC$. Pentru a găsi locul geometric al lui O_1 va trebui să găsim poziţiile extremale ale lui B_1. Aceste poziţii se obţin în capetele diametrului paralel cu AC. Se obţine astfel prin intersectare segmentul MN de lungime $4R$ şi mijloc O. Datorită simetriei, locul geometric este alcătuit din 3 astfel de linii

108. Să se înscrie într-un pătrat $ABCD$ dat prin vîrfurile sale, numai cu compasul un triunghi echilateral avînd un vîrf în A şi celelalte M,N pe BC şi CD.

Soluţie

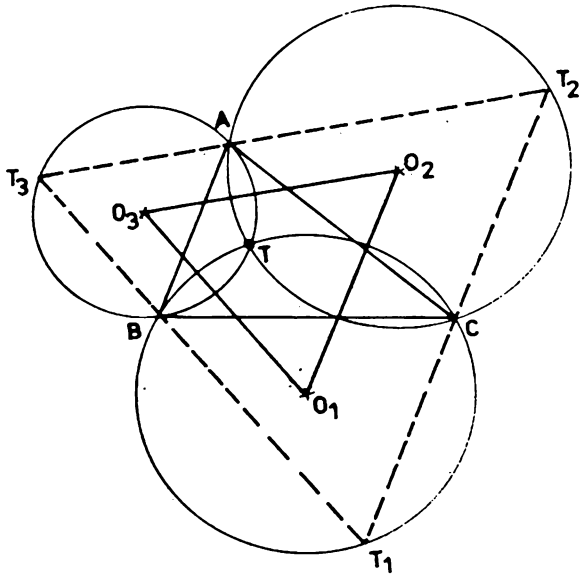


Se descrie din B ca centru un cerc de rază $BA = BC$, din C cu CA ca rază un cerc care să intersecteze pe primul în A şi E.
E se găseşte pe AB şi $AB = BE$. Din E şi A ca centre cu EA rază se descriu două arce care se taie în F. Din C cu CF ca rază se descrie un cerc care taie BC în M. Din A cu AM ca rază se descrie un arc ce taie ultimul cerc în N. Triunghiul AMN este triunghiul cerut. O justificare a construcţiilor făcute se poate obţine în modul următor: latura triunghiului AMN se poate calcula şi calculînd AE, CF, MC, etc. se ajunge la concluzia că AMN are lungimea laturii găsită prin calcul.

109. Dintre toate triunghiurile echilaterale ale căror laturi trec prin puncte date A, B, C să se construiască cel de perimetru maxim.

Soluţie

Se descriu pe laturile triunghiurilor arce capabile de 60°. Vîrfurile triunghiurilor echilaterale circumscrise lui ABC se găsesc pe aceste cercuri. Problema revine la a găsi secanta de lungime maximă care trece prin punctul comun a două cercuri. Se poate dovedi relativ uşor că aceasta este paralelă cu linia centrelor. Triunghiul găsit este cel notat pe figură cu $T_1T_2T_3$.



110. Se dă un cerc O, un punct fix A şi M mobil pe cerc. Pe dreapta AM se construieşte triunghiul ATM. Se cere locul geometric descris de vîrful T cînd M parcurge cercul O.

Soluţie

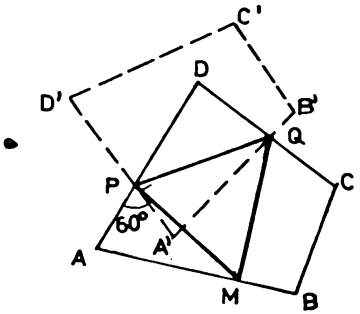
Avem $AT = AM$, $\sphericalangle TAM = 60°$. Deci toate punctele T se obţin din punctele M printr-o rotaţie de 60° în jurul lui A. Prin urmare locul geometric al lui T se obţine rotind cercul O în jurul lui A cu 60°. Deoarece rotaţia se poate face în două sensuri, locul geometric căutat se compune din două cercuri egale cu (O), situate simetric în raport cu AO, încît $\sphericalangle O'AO = \sphericalangle O''AO = 60°$, unde O', O'' sînt centrele cercurilor găsite.

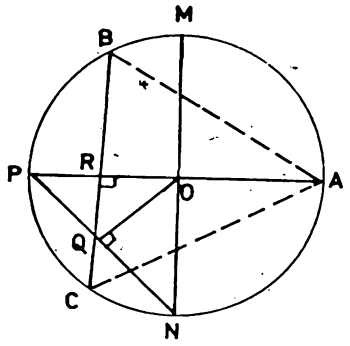
111. Să se arate că pentru orice poligon convex se poate construi un triunghi echilateral cu vîrfurile pe laturile poligonului respectiv.

Soluţie

Vom demonstra proprietatea pentru un patrulater convex $ABCD$, demonstraţia pentru orice poligon făcîndu-se analog. Fie $P \in (AD)$. Considerăm rotaţia $R(P,60°)$ (vezi figura 98).

Observăm că frontiera poligonului rotit mai intersectează poligonul dat în cel puţin un punct, fie acesta Q şi fie M preimaginea lui Q prin rotaţia considerată. Atunci, triunghiul PQM îndeplineşte condiţiile problemei deoarece $PO = PM$ şi $\sphericalangle QPM = 60°$.



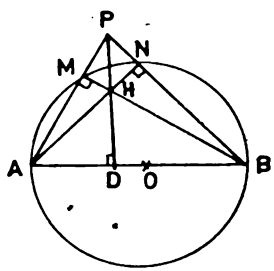


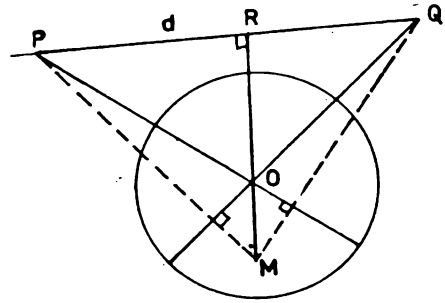
112. Într-un cerc dat să se construiască numai cu echerul drept un triunghi echilateral înscris în cerc.

Soluție

Construim doi diametri perpendiculari PA și MN ca în figura 99. Din O ducem perpendiculara pe PN care o taie în Q. Evident Q este mijlocul lui PN. Din Q ducem perpendiculara QR pe PA, care taie cercul în B și C. Triunghiul ABC este echilateral deoarece BC trece prin R, mijlocul lui PQ și $BC \parallel MN$.

113. Se dă un cerc $\mathscr{C}$ cu centrul O. Să se construiască numai cu ajutorul riglei un triunghi echilateral înscris în cercul $\mathscr{C}$.





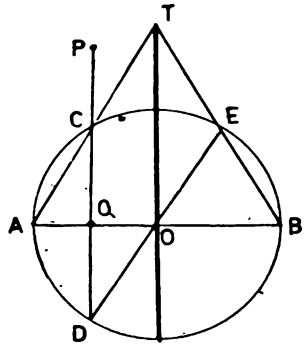
Soluţie

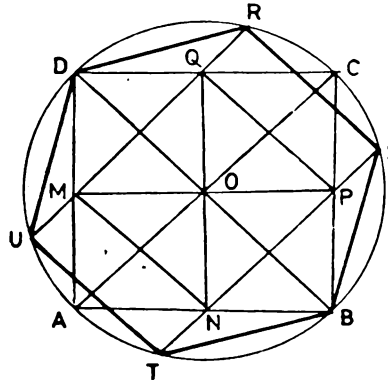
Vom face mai multe construcţii succesive.

1) Construcţia perpendicularei dintr-un punct $P \notin \mathcal{C}$ pe un diametru AB. Fie M şi N intersecţiile dintre PA şi PB cu $\mathcal{C}$. Avem $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ANC = 90°$ deci $\{H\} = AN \cap BM$ este ortocentrul triunghiului PAB, prin urmare $PH \perp AB$.

2) Construcţia perpendicularei din O pe o dreaptă d ce nu treace prin O. Fie $P, Q \in \mathcal{C}$ încît $\sphericalangle POQ \neq 90°$. Perpendiculara din P pe QO întîlneşte perpendiculara din Q pe PO în M. Atunci O este ortocentrul triunghiului PMQ şi deci $MO \perp d$.

3) Construcţia a doi diametri perpendiculari. Fie $P \notin \mathcal{C}$. Ducem $PQ \perp AB$ ca în construcţia 1. Fie $\{C,D\} = PQ \cap \mathcal{C}$. Dreapta DO taie cercul în E. Deoarece $ACEB$ este trapez isoscel, triunghiul TAB este isoscel, unde $\{T\} = AC \cap BE$. Urmează că $TO \perp AB$.





4) Construcţia unui hexagon regulat. Conform construcţiei 3, putem construi diametrii perpendiculari AC şi BD. Deci $ABCD$ este pătrat. Conform construcţiei 2, putem duce din O perpendiculare pe laturile pătratului în M,N,P,Q care sînt mijloacele laturilor AD,AB,BC,CD. Notăm cu R, U, S, T intersecţiile lui MQ şi NP cu cercul. Deoarece $PQ = BD/2 = R$,

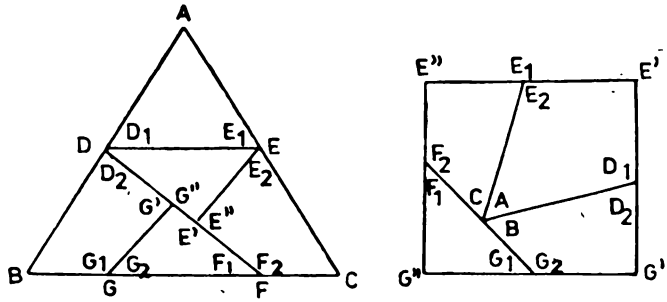
$RS = TU = R$. Se justifică uşor că figura $DRSBTU$ este hexagon regulat. Atunci DTS este triunghi echilateral înscris în cercul $\mathcal{C}$.

114. **Să se arate că un triunghi echilateral poate fi descompus în patru poligoane care prin juxtapunere să formeze un pătrat.**

Problema lui H.E.Dudeney

Soluţie

Fie ABC triunghiul echilateral de latură a şi înălţime h. Aria triunghiului este $S = \frac{a \cdot h}{2}$, deci latura pătratului trebuie să fie $l = \sqrt{\frac{ah}{2}}$, segment posibil de construit cu rigla şi compasul. Fie D şi E mijloacele laturilor AB şi AC.



Cu o extremitate în D şi alta în $F \notin (BC)$ se construieşte segmentul $DF = l = \sqrt{\frac{ah}{2}}$. Întrucît $DE \parallel BC$, simetricul punctului E faţă de mijlocul lui DF aparţine laturii (BC); fie G acest simetric. Notăm cu E', G' proiecţiile lui E şi G pe dreapta DF. Decupăm figura după DF şi apoi după $E'E_1$, $G'G_2$ (a se vedea figura 104 a). Obţinem trei patrulatere şi un triunghi: $AD_1E'E_1$, $E_2E''F_2C$, D_2BG_2G' şi $G_1G''F_1$ pe care le putem asambla într-un pătrat ca în figura 104 b.

Demonstraţie.

Deoarece DE este linie mijlocie $\sigma[D_1F_1E_1] = \sigma[AD_1E_1] = 1/4\ \sigma[ABC]$. Dar $\sigma[D_1F_1E_1] = \frac{1}{2}D_1F_1 \cdot E'E_1 = \frac{DF^2}{4}$. Prin urmare $E'E_1 = \frac{DF}{2}$

Deoarece $D_1E_1F_1G_1$ este paralelogram, rezultă $D_2G' = F_2E''$, deci $G'D_2 + D_1E = E''E_2 + F_1G = DF$. Din prima figură deducem $FC + BG = FG = \frac{BC}{2}$. De asemenea:

$\sphericalangle FCE + \sphericalangle EAD + \sphericalangle DBG = 180°$

$F_2E'' + F_1G'' = D_2G' + D_1E' = DF$ şi $G'G_2 + G_1G'' = E_1E + E_2E'' =$

$= 2\frac{DF}{2} = DF$. Cum $\sphericalangle F_1G''G_1 = \sphericalangle G_2G'D_2 = \sphericalangle D_1E'D_1 = \sphericalangle E_2E''F_2 = 90°$ rezultă că $E''G''G'E'$ este pătrat.

Notă

a) Merită de amintit o teoremă generală aparţinînd matematicianului român F. Bolyai.

Definiţie.

Două figuri din plan se numesc echidecompozabile dacă este posibil să se descompună una din ele într-un număr finit de părţi care pot fi rearanjate pentru a forma a doua figură.

Teoremă (F. Bolyai).

Două poligoane de arii egale sînt echidecompozabile în părţi poligonale.

Este remarcabil faptul că acest rezultat nu se extinde la poliedre după cum a demonstrat Max Dehn (1902).

b) Pentru o altă soluţie a problemei cititorul poate consulta cartea "Priveliști matematice", autor Isaac J. Schoenberg, pag. 9-14.

CAPITOLUL 4

PROBLEME DATE LA CONCURSURI ŞI OLIMPIADE

115. În interiorul unui pătrat $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABK, BCL, CDM, DAN. Să se demonstreze că mijloacele segmentelor KL, LM, MN, NK şi mijloacele segmentelor AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN sînt vîrfurile unui dodecagon regulat.

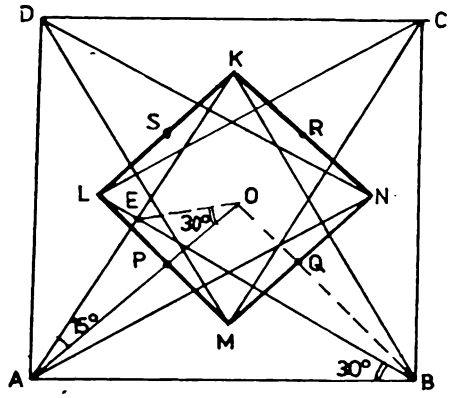
A 19-a O.I.M. 1977

Soluţie

Fie P, Q, R, S mijloacele segmentelor LM, MN, NK, KL. Este clar că $PQRS$ este pătrat avînd centrul O şi laturile paralele cu ale lui $ABCD$ şi $OP = \frac{OL}{\sqrt{2}} = \frac{l}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, unde l este latura pătratului. Deoarece întreaga configuraţie are ca axe de simetrie dreptele AC, BD, LN, MK este suficient să arătăm că, notînd E mijlocul lui AK, $OE = \frac{l}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ şi $\sphericalangle EOP = 30°$. Este clar că E este intersecţia

dreptelor AK şi LB evident perpendiculare; patrulaterul $AEOB$ este inscriptibil şi $\sphericalangle EOP = 30°$. Aplicînd teorema sinusurilor în AEO deducem

$EO = \frac{l}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. Cu aceasta, demonstraţia este încheiată.



116. Fie ABC un triunghi echilateral. O dreaptă variabilă trecînd prin centrul O al triunghiului, taie a doua oară cercurile circumscrise triunghiurilor OAB, OBC, OCA respectiv în C', A', B'. Să se demonstreze că: $OA'^2 + OB'^2 + OC'^2 = 2 \cdot AB^2$.

M.Tena, propusă pentru OBM 1984

Soluţie

Avem $\frac{R}{\sin 30°} = \frac{OC'}{\sin(30° + \alpha)}$.

De unde:

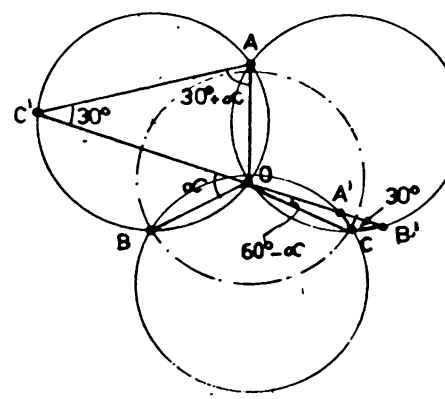
$OC'^2 = 4R^2 \sin^2(30° + \alpha)$

Analog $OA'^2 = 4R^2 \sin^2(-\alpha + 30°)$

$OB'^2 = 4R^2 \sin(90° + \alpha)$

Avem:

$OA'^2 + OB'^2 + OC'^2 = +2R^2[1 - \cos(60° - 2\alpha) + 1 - \cos(60° + 2\alpha) + 1 - \cos(120° + 2\alpha)] = 2R^2(3 - \cos60° \cos2\alpha + \sin60° \sin2\alpha - \cos60° \cos2\alpha - \sin60° \sin2\alpha + \cos2\alpha = 6R^2 = 2l^2$.



117. Se consideră o împărțire a planului în triunghiuri echilaterale congruente. Există un pătrat ale cărui vîrfuri aparțin toate, mulțimii vîrfurilor acestor triunghiuri.

V.Pătrîngenaru (Dată la baraj OIM 1977)

Soluție

Fie M și N două puncte laticiale vîrfuri de triunghiuri echilaterale de coordonate $M(m_1, m_2)$, $N(n_1, n_2)$.

$$\left.\begin{array}{l} m_1, n_1 \in \left\{\dfrac{\alpha}{2} \mid \alpha \in Z\right\} \\ m_2, n_2 \in \left\{\dfrac{\beta\sqrt{3}}{2} \mid \beta \in Z\right\} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} m_1 - n_1 = \dfrac{a}{2}, \ a \in Z \\ m_2 - n_2 = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}, \ b \in Z \end{array}$$

Deci:

(1) $MN = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+3b^2}$; $a, b \in N$

Presupunem că există un pătrat $ABCD$ cu vîrfuri ce coincid cu vîrfuri ale triunghiurilor echilaterale, atunci:

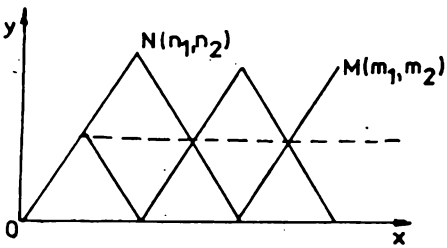


Fig. 107.

$AB\sqrt{2} = AC \Rightarrow (\exists) x, y, z, t \in N$ încît:

(2) $2x^2 + 6y^2 = z^2 + 3t^2$

Dacă $l < d = (x, y, z, t)$ – simplificînd (2) prin d^2 rezultă că există $x, y, z, t \in N$ cu $(x, y, z, t) = l$ încît:

(3) $2x^2 + 6y^2 = z^2 + 3t^2$.

LEMA.

$(\forall) p, q \in N, p^2 + 3q^2 \not\equiv 2 \pmod 4$

Caz 1. $\left.\begin{array}{l} p = 2p' \\ q = 2q' \end{array}\right\} \Rightarrow p^2 + 3q^2 \equiv 0 \pmod 4$

Caz 2. $\left.\begin{array}{l} p = 2p' \\ q = 2q' + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow p^2 + 3q^2 \equiv 3 \pmod 4$

Caz 3. $\left.\begin{array}{l} p = 2p' + 1 \\ q = 2q' \end{array}\right\} \Rightarrow p^2 + 3q^2 \equiv 1 \pmod 4$

Caz 4. $\left.\begin{array}{l} p = 2p' + 1 \\ q = 2q' + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow p^2 + 3q^2 \equiv 0 \pmod 4$

Din (3) $2 \mid z^2 + 3t^2 \Rightarrow 4 \mid z^2 + 3t^2 \Rightarrow 2 \mid x^2 + 3y^2 \Rightarrow 4 \mid x^2+3y^2 \Rightarrow 8 \mid z^2 + 3t^2$

Dacă $z = 2z' + 1$, $t = 2t' + 1$, $z', t' \in N$ rezultă că:

$z^2 + 3t^2 = 4[1 + z'(z' + 1) + 3t'(t' + 1)] \equiv 4 \pmod 8$

deci 8 nu divide $z^2 + 3t^2$.

Din $4/z^2 + 3t^2$ avînd în vedere lema, rezultă că:

$z = 2z'$, $t = 2t'$, $z, t' \in N$

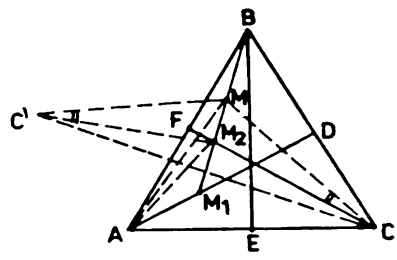
Deci $8/z^2 + 3t^2 = 4(z'^2 + 3t'^2) \Rightarrow 2/z'^2 + 3t'^2 \Rightarrow 4/z'^2 + 3t'^2$
$\Rightarrow 16/z^2 + 3t'^2 \Rightarrow 8/x^2 + 3y^2 \Rightarrow x, y$ numere întregi pare. În concluzie, (x, y, z, t) $\neq 1$ contradicție, deci pătratul $ABCD$ nu există.

118. Fie ABC un triunghi echilateral. Găsiți locul geometric al punctelor M pentru care $\sphericalangle MAB + \sphericalangle MBC + \sphericalangle MCA = 90°$.

Laurențiu Panaitopol

Soluție

Se observă că dacă M aparține înălțimilor AD, BE sau DF, relația din enunț este satisfăcută. Vom arăta că locul geometric este format din înălțimile triunghiului. Presupunem că M nu aparține nici unei înălțimi.



Fie $BM \cap AD = \{M_1\}$ și $BM \cap CF = \{M_2\}$. Avem:

(1) $\sphericalangle MAB + \sphericalangle M_2BC + \sphericalangle M_2CA = 90°$ (deoarece $M_2 \in FC$)

(2) $\sphericalangle MAB + \sphericalangle MBC + \sphericalangle MCA = 90°$

Prin scădere membru cu membru rezultă

(3) $\sphericalangle M_2AM = \sphericalangle MCM_2$

la fel:

(4) $\sphericalangle MAM_1 = \sphericalangle MCM_1$

Fie C' simetricul lui C față de BM. Evident $C' \neq A$. Cum

$\sphericalangle MC'M_2 = \sphericalangle MCM_2 = \sphericalangle MAM_2$ (din relația (3))

rezultă că AM_2MC_1 este inscriptibil, deci $M_2 \in \mathcal{C}(AMC')$.

Analog $M_1 \in \mathcal{C}(AMC')$. Rezultă că M_1, M_2, M sînt conciclice, fals, deoarece M_1, M_2, M sînt coliniare. Deci locul geometric este $[AD] \cup [BE] \cup [CF]$.

119. Fie ABC un triunghi echilateral de centru O iar M un punct în interiorul triunghiului. Să se arate că suma distanțelor de la M la vîrfurile triunghiului este minimă cînd $M \equiv O$.

Soluție

Ducem prin vîrfurile triunghiului paralele la laturile triunghiului, care formează triunghiul $A'B'C'$. Fie l latura triunghiului ABC. Evident, $B'C' = C'A' = A'B' = 2l$. Avem:

$\sigma[MB'C'] \leq \dfrac{MA \cdot B'C'}{2} = MA \cdot l$ cu egalitate cînd $MA \perp B'C'$. Deci:

$\sigma[A'B'C'] = \sigma[MA'B'] + \sigma[MB'C'] + \sigma[MA'C'] \leq$

$\leq MA \cdot l + MB \cdot l + MC \cdot l = l\,(MA + MB + MC)$

cu egalitate cînd $MA \perp B'C'$,

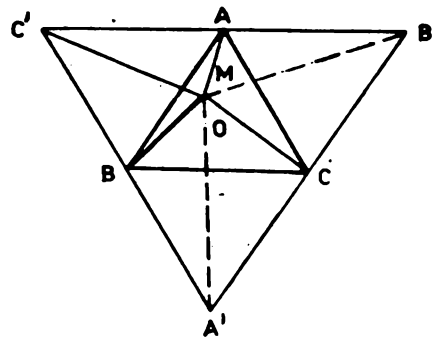
$MB \perp C'A'$, $MC \perp A'B'$, adică cînd $M \equiv O$. Dar $\sigma[A'B'C'] =$

$\dfrac{1}{2}(OA \cdot B'C' + OB \cdot A'C' + OC \cdot A'B') = l\,(OA + OB + OC)$

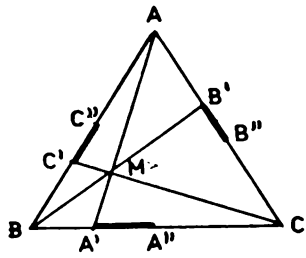
Rezultă că:

$MA + MB + MC \geq OA + OB + OC$ cu egalitate cînd $M \equiv O$.

120. Fie ABC un triunghi echilateral, M un punct interior şi A', B', C' intersecţiile dreptelor AM, BM, CM cu laturile triunghiului. Dacă A'', B'', C'' sînt mijloacele laturilor BC, CA, AB, să se arate că se poate forma un triunghi avînd laturile egale cu $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$.



Laurenţiu Panaitopol (Problemă dată la barajul pentru OIM 1981)



Soluţie

Avem: $BA' = K_1 a$, $CB' = K_2 a$, $AC' = K_3 a$, $K_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, 3$, unde a este lungimea laturii triunghiului. Din teorema lui Ceva rezultă

(1) $K_1 K_2 K_3 = (1 - K_1)(1 - K_2)(1 - K_3)$

Observăm că:

$A'A'' = a \left| K_1 - \frac{1}{2} \right|$, $B'B'' = a \left| K_2 - \frac{1}{2} \right|$,

$C'C'' = a \left| K_3 - \frac{1}{2} \right|$

Fie $\left| K_1 - \frac{1}{2} \right| = \frac{x}{2}$, $\left| K_2 - \frac{1}{2} \right| = \frac{y}{2}$,

$\left| K_3 - \frac{1}{2} \right| = \frac{z}{2}$

Deci $x, y, z \in (0, 1)$

Relaţia (1) devine:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{2}\right)$$

adică:

(2) $xyz + x + y + z = 0$

Vom arăta că $|z| < |x| + |y|$

Din (2) rezultă:

$z = \frac{-(x+y)}{1 + xy}$ şi, deci, inegalitatea $|z| < |x| + |y|$ este echivalentă cu:

(3) $|x + y| < (1 + xy)(|x| + |y|)$

Dacă $xy > 0$ inegalitatea (3) este evidentă. Dacă $x > 0$ şi $y < 0$, inegalitatea (3) se reduce la:

(4) $|x + y| < (1 + xy)(x - y)$

Avem $(x - y)(1 + xy) > x + y \Leftrightarrow x - y + x^2y - xy^2 > x + y \Leftrightarrow x^2y - xy^2 - 2y > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - xy < 2$, evident. Deci are loc (4) ceea ce arată că (3) este adevărată. Inegalitățile

$|x| < |y| + |z|$ şi $|y| < |x| + |z|$ se demonstrează analog.

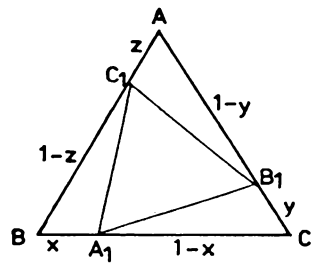
121. Se consideră un triunghi echilateral de latură 1 şi $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (AC)$, $C_1 \in (AB)$. Să se arate că

$$A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 \geq \frac{3}{4}$$

Laurenţiu Panaitopol, Olimpiada finală 1988, cl.IX

Soluţia 1.

Notăm $BA_1 = x$, $CB_1 = y$, $AC_1 = z$. Avem, utilizînd teorema cosinusurilor:



$A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 = (1 - x)^2 + y^2 - y(1 - x) +$

$+ z^2 + (1 - y)^2 - z(1 - y) + x^2 + (1 - z)^2 - x(1 - z) =$

$= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 3x - 3y - 3z + xz + yz + xy +$

$+ 3 \geq \frac{3}{4}$ sau:

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 3x - 3y - 3z + xy + yz + zx + \frac{9}{4} \geq 0$

sau încă:

$(x + y + z - \frac{3}{2})^2 + (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \geq 0$

Aşadar inegalitatea revine la inegalitatea evidentă

$$(x + y + z - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] \geq 0$$

Se observă că egalitate avem cînd:

$$x = y = z = \frac{1}{2}.$$

Soluţia 2.

Se ştie că dintre toate triunghiurile înscrise într-un triunghi dat, perimetrul minim îl are triunghiul ortic. Prin urmare:

$$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 \geq \frac{3}{2}$$

Dar $A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 \geq \frac{1}{3}(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1)^2 \geq$

$$\geq \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

122. Fie ABC un triunghi şi M în planul său. Notăm cu $s(M)$ suma pătratelor distanţelor punctului M la laturile triunghiului şi cu $S(M)$ suma pătratelor distanţelor punctului M la vîrfurile triunghiului. Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sînt echivalente:

a) $4s(M) \geq S(M)$ pentru orice M din plan.

b) Triunghiul ABC este echilateral.

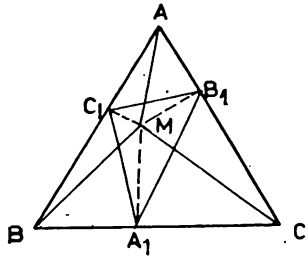
Laurenţiu Panaitopol (Dată la etapa finală, clasa a XI−a, 1988)

Soluţie

a) Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Avem $GA = 2\,GA'$; $GB = 2\,GB'$; $GC = 2\,GC'$ unde A', B', C' sînt mijloacele laturilor.

De unde:

$S(G) = 4\,(GA'^2 + GB'^2 + GC'^2) \geq 4\,s(G)$ egalitatea realizîndu−se cînd medianele sînt înălţimi, deci triunghiul ABC este echilateral.



b) Fie ABC un triunghi echilateral, iar A_1, B_1, C_1 proiecţiile lui M pe laturi. AC_1MB_1 este patrulater inscriptibil, iar MA este diametrul cercului circumscris, prin urmare $B_1C_1 = MA \sin 60° = MA\frac{\sqrt{3}}{2}$. De unde $MA^2 = \frac{4}{3}B_1C_1^2$

Avem:

$$S(M) = \frac{4}{3}(\sum B_1C_1^2)$$

Inegalitatea $4s(M) \geq S(M)$ revine la $\sum MA_1^2 \geq \frac{1}{3}\sum B_1C_1^2$

Dar, conform relaţiei lui Leibniz,

$\sum MA_1^2 = \sum G'A_1^2 + 3MG'^2 \geq \sum G'A_1^2$

unde G' este centrul de greutate al triunghiului $A_1B_1C_1$. Dacă notăm cu m_{a_1}, m_{b_1}, m_{c_1} medianele triunghiului $A_1B_1C_1$ avem:

$$\sum G'A_1^2 = \frac{4}{9}\left(m_{a_1}^2 + m_{b_1}^2 + m_{c_1}^2\right) = \frac{1}{3}\sum B_1C_1^2$$

Prin urmare $4\,s(M) \geq S(M)$.

123. Fie ABC un triunghi echilateral de latură a, iar M un punct în interiorul său. Notăm cu A_1, B_1, C_1 proiecţiile lui M pe laturi. Să se arate că :

a) $A_1B + B_1C + C_1A = \frac{3a}{2}$

b) Dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente dacă şi numai dacă M este situat pe una din înălţimile triunghiului.

L. Panaitopol Olimpiada judeţeană 1990

Soluție

a) Avem relația evidentă

(1) $MB^2 - MC^2 = A_1B^2 - A_1C^2$

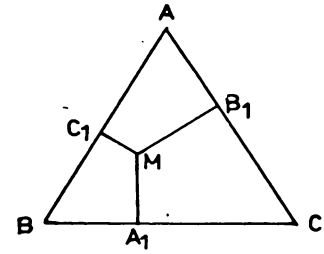
Scriind încă două relații analoage și sumînd obținem:

(2) $A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 + C_1A^2 - C_1B^2 = 0$

care este așa numita relație a lui Opel. Relația (2) se mai scrie:

(3) $(A_1B - A_1C)\,a + (B_1C - B_1A)\,a + (C_1A - C_1B)\,a = 0$, de unde:

$A_1B + B_1C + C_1A = A_1C + B_1A + C_1B = \frac{3a}{2}$



b) Fie $A_1B = x$, $B_1C = y$, $C_1A = z$. Condiția de concurență a dreptelor AA_1, BB_1, CC_1 revine la:

(4) $\frac{a-x}{x}\,\frac{a-y}{y}\,\frac{a-z}{z} = 1$ sau:

(5) $(a - x)(a - y)(a - z) = x\,y\,z$ sau:

(6) $a^3 - (x + y + z)\,a + (xy + yz + zx)\,a - 2\,x\,y\,z = 0$

Cum $x + y + z = \frac{3a}{2}$, (6) devine:

(7) $-a^3 + 2(xy + yz + zx)\,a - 4\,x\,y\,z = 0$

Dar:

$(a - 2x)(a - 2y)(a - 2z) = a^3 - 2(x + y + z)\,a + 4(xy + yz + zx)\,a - 8\,x\,y\,z =$

$= a^3 - 3a^3 + 4(xy + yz + zx)\,a - 8\,xyz = -2a^3 + 4(xy + yz + zx)\,a - 8\,xyz = 0$,

conform relației (7).

Deci

(8) $(a - 2x)(a - 2y)(a - 2z) = 0$

de unde $x = \frac{a}{2}$ sau $y = \frac{a}{2}$ sau $z = \frac{a}{2}$, deci M se află pe una din înălțimi.

124. Un tetraedru $OABC$ are baza ABC un triunghi echilateral. Fie S aria triunghiului avînd lungimile egale cu lungimile muchiilor OA, OB, OC. Să se arate că, $V \leq \frac{1}{2}\,RS$ unde R este raza sferei circumscrise tetraedrului, iar V volumul acestuia.

Stere Ianuș (Problemă dată la barajul pentru OIM, 1981)

Soluție

Fie l lungimea laturii triunghiului echilateral și a, b, c lungimile lui OA, OB, OC. Se consideră o inversiune cu centrul O de putere ρ^2. Punctele A, B, C se transformă prin această inversiune în A', B', C', iar

(1) $A'B' = \frac{l\rho^2}{ab}$, $B'C' = \frac{l\rho^2}{bc}$, $C'A' = \frac{l\rho^2}{ca}$

Notăm cu a', b', c' lungimile segmentelor OA', OB', OC'. Avem:

(2) $a' = \frac{\rho^2}{a}$, $b' = \frac{\rho^2}{b}$, $c' = \frac{\rho^2}{c}$

Fie α unghiul dintre OA şi OB, β unghiul format de OC cu planul (OAB) şi V' volumul tetraedrului $OA'B'C'$. Atunci

$V = a\,b\,c \sin\alpha \cos\beta$

$V' = a'\,b'\,c' \sin\alpha \cos\beta$

Deci

(3) $\frac{V}{V'} = \frac{abc}{a'b'c'}$

Să observăm că sfera circumscrisă tetraedrului $OABC$, având centrul în I, se transformă prin inversiune în planul $(A'B'C')$ iar punctul diametral opus lui O în această sferă se transformă în I', punctul de intersecţie dintre IO şi $(A'B'C')$. Mai mult, avem $OI' \perp (A'B'C')$ şi

$2R \cdot OI = \rho^2$. Atunci $V' = \frac{1}{3}S' \cdot OI'$, unde $S' = \sigma[A'B'C']$. Aplicînd formula lui Heron, rezultă:

$$S' = \sqrt{p'(p' - A'B')p' - B'C')(p' - C'A')}$$

şi ţinînd seama de (1) obţinem:

(4) $S' = \frac{l^2\rho^4}{a^2b^2c^2} S$

Prin urmare:

(5) $V' = \frac{1}{3} \frac{l^2\,\rho^4}{a^2b^2c^2} S \frac{\rho^2}{2R} = \frac{l^2\,\rho^6}{6a^2b^2c^2} \cdot \frac{S}{R}$.

Din (3) şi (5) rezultă:

$$V = \frac{abc}{a'b'c'} \cdot V' = \frac{l^2\rho^6}{6abca'b'c'} \cdot \frac{S}{R}$$

şi ţinînd seama de (2) obţinem

(6) $V = \frac{l^2\,S}{6R}$

Pe de altă parte, $l = R_0\sqrt{3}$, unde R_0 este raza sferei circumscrise triunghiului echilateral ABC, cerc situat pe sfera $OABC$. Rezultă $R_0 \leq R$, deci $l \leq R\sqrt{3}$ şi din (6) urmează că $V \leq \frac{1}{2}RS$.

125. Fie ABC un triunghi echilateral fixat şi d o dreaptă variabilă din planul triunghiului. Să se determine minimul sumei $AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2$ în funcţie de lungimea laturii triunghiului şi să se precizeze mulţimea dreptelor care realizează acest minim.

Marcel Chiriţă

Soluţie

Fie ABC un triunghi cu $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $C(0, a\sqrt{3})$ şi
(d) $y = mx + n \Leftrightarrow mx - y + n = 0$
Avem:

$$S_d = AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2 = d^2(A, d) + d^2(B, d) + d^2(C, d) =$$

$$= \frac{1}{m^2 + 1}\left[(-am + n)^2 + (am + n)^2 + (-a\sqrt{3} + n)^2\right] =$$

$$= 2a^2 + \frac{(a - n\sqrt{3})^2}{m^2 + 1}$$

Se deduce că S_d este minimă $\Leftrightarrow n = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Minimul se realizează pentru dreptele ce trec prin centrul de greutate $G(0, \frac{a}{\sqrt{3}})$ al triunghiului adică pe mulţimea dreptelor de ecuaţie $mx\sqrt{3} - \sqrt{3}y + a = 0$.

Observaţie.

Pentru o extindere în spaţiu a acestei probleme, cititorul poate consulta [4].

126. Fie M un punct în interiorul unui triunghi echilateral de latură 1. Notăm $MA = x$, $MB = y$, $MC = z$, $\sphericalangle BMC = \alpha$, $\sphericalangle CMA = \beta$, $\sphericalangle AMB = \gamma$. Să se arate că :

1) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geq -\frac{3}{2}$

2) $xy + yz + zx \geq 1$.

M. Chiriţă

Soluţie

1) Deoarece $\alpha + \beta + \gamma = 360°$ rezultă $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180°$. Avem:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \frac{3}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\cos^2\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} =$$

$$= 2\left(\cos^2\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 2\left(\cos^2\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= 2\left[\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right] \geq 0$$

Egalitatea se obţine cînd $\alpha = \beta = \gamma = 120°$.

2) Aplicînd teorema cosinusului în ΔMBC, ΔMCA şi ΔMAB obţinem:

$$(3)\quad \frac{-1 + y^2 + z^2}{2yz} + \frac{-1 + x^2 + y^2}{2xz} + \frac{-1 + x^2 + y^2}{2xy} + \frac{3}{2} \geq 0$$

sau:

$$(xy^2 + xyz + x^2y) + (xyz + y^2z + yz^2) + (x^2z + xyz + xz^2) - (x + y + z) \geq 0$$

sau:

$$(4)\ (x + y + z)(xy + yz + xz - 1) \geq 0$$

de unde

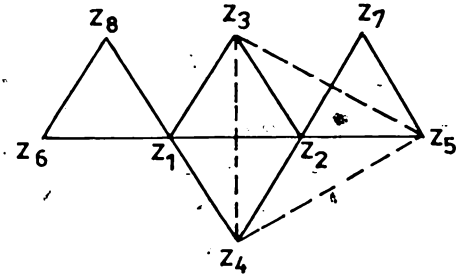
$$(5)\ xy + yz + xz \geq 1.$$

Egalitatea se obţine cînd M este centrul triunghiului.

127. Fie R^2 planul euclidian şi A_1, A_2 o partiţie a lui R^2. Atunci există un triunghi echilateral astfel încît vîrfurile sale aparţin aceleiaşi mulţimi A_i ($i = 1, 2$).

Soluţie

Fie z_1, $z_2 \in A_1$. Considerăm configuraţia din figura 114. Condiţia z_3 sau $z_4 \in A_1$ conduce la contradicţie, deci z_3, $z_4 \in A_2$. Triunghiul $z_3z_4z_5$ fiind echilateral, rezultă $z_5 \in A_1$, şi deci $z_7 \in A_2$. Analog $z_6 \in A_1$ şi $z_8 \in A_2$. Obţinem triunghiul $z_4z_7z_8$ echilateral cu vîrfurile în A_2, absurd. Aşadar, există $i \in \{1, 2\}$ şi un triunghi echilateral, care să aibă vîrfurile în A_i.



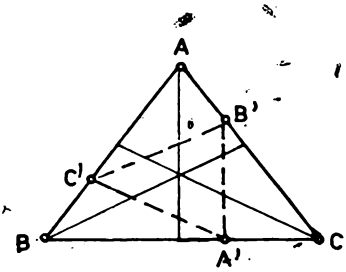
128. Fie ABC un triunghi echilateral şi E mulţimea tuturor punctelor segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$. Este adevărat că pentru orice partiţie a lui E în două clase disjuncte, există un triunghi dreptunghic ale cărui vîrfuri aparţin toate trei unei aceleiaşi clase a partiţiei? Justificaţi răspunsul.

Dată la OIM, 1983

Soluţie

Vom demonstra că pentru orice partiţie a lui E în două submulţimi X şi Y cel puţin una din ele conţine vîrfurile unui triunghi dreptunghic. Putem alege A', B', C' pe BC, CA, AB, astfel încît $A'B'C'$ să fie echilateral, cu laturile paralele cu înălţimile triunghiului ABC, dacă luăm:

$$\frac{A'C}{BC} = \frac{B'A}{CA} = \frac{C'B}{AB} = \frac{1}{3} \text{ (vezi figura)}$$



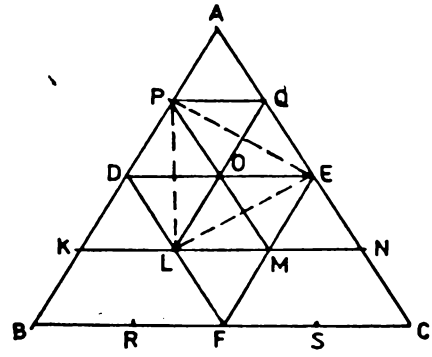
Să presupunem că există o partiţie $E = X \cup Y$ astfel încît nici X şi nici Y să nu conţină vîrfurile unui triunghi dreptunghic. Fie $A' \in X$ şi $B' \in X$. Deci toate punctele segmentului BC cu excepţia lui A' aparţin lui Y, şi deci $C' \in X$, deoarece în caz contrar C', B şi proiecţia lui C' pe BC ar aparţine lui Y. Deoarece $C' \in X$ rezultă toate punctele segmentului $[AB]$ în afară de C' aparţin lui Y, deci Y conţine iarăşi vîrfurile unui triunghi dreptunghic format din B, un punct pe $[AB]$ diferit de B şi C şi proiecţia sa pe BC. Deoarece am ajuns la o contradicţie, proprietatea este demonstrată.

129. Liniile mijlocii ale triunghiului echilateral ABC îl împart în patru triunghiuri ADE, BDF, DEF, CEF ale căror mijloace de laturi sînt K, L, M, N, O, P, Q, R, S. Fiecare din cele 15 puncte obținute sînt colorate cu alb sau negru. Arătați că există trei puncte la fel colorate ce sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

Soluție

Vom demonstra o propoziție mai tare și anume că în loc de 15 puncte sînt necesare numai 10 puncte A, P, D, K, L, M, N, E, Q, O.

Presupunem prin absurd că n-ar exista un triunghi echilateral cu vîrfurile colorate cu aceeași culoare. Fie O negru, cum PEL echilateral cel puțin unul din ele este negru; presupunem P negru. Dar ΔOPD și ΔOPQ echilaterale, O, P negre, rezultă D, Q albe. Cum DQM este echilateral, rezultă M negru. Analog E, L albe.



D, E albe, ΔDEA echilateral $\Rightarrow A$ negru

Q, L albe, ΔQLN echilateral $\Rightarrow N$ negru

D, L albe, ΔDLK echilateral $\Rightarrow K$ negru

Dar AKN este echilateral, contradicție. Deci există un triunghi cu vîrfurile colorate cu aceeași culoare.

130. Să se arate că există în planul euclidian un triunghi echilateral avînd toate vîrfurile cu ambele coordonate numere întregi.

Soluție

Deoarece A_2 se obține din A_1 printr-o rotație de unghi egal cu 60°, conform unei teoreme de geometrie analitică, avem:

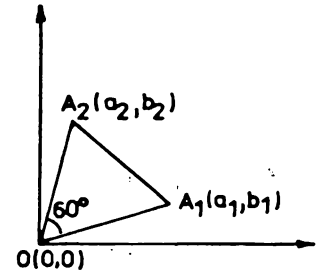
(1) $a_2 = a_1 \cos 60° - \sin 60°$,

(2) $b_2 = a_1 \cos 60° + \sin 60°$,

sau:

$$(3) \quad a_2 = \frac{a_1}{2} + b_1 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(4) \quad b_2 = a_1 \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{b_1}{2}$$



Cum $a_1, b_1, a_2, b_2 \in Z$, iar $\sqrt{3} \in R \setminus Q$ din (3) și (4) rezultă $b_1 = 0$ și $a_1 = 0$ — contradicție.

Observație.

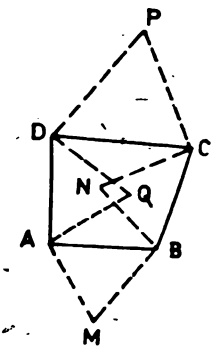
Exact la fel se poate demonstra că nu există triunghi echilateral cu toate coordonatele numere raționale.

131. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Se construiesc triunghiurile echilaterale ABM, CDP, BCN, ADQ primele două în exteriorul patrulaterului, celelalte două către interior. Să se arate că $MN = AC$.
Ce se poate spune despre figura $MNPQ$?

propusă de Tunisia pentru OIM, 1982

Soluție

Se observă că MN se obține rotind AC în jurul lui B cu un unghi de 60°, deci $MN = AC$, iar unghiul dintre MN și AC este de 60°. Analog PQ se obține din AC rotindu-l cu 60° în jurul lui D, deci $PQ = AC$, iar PQ face cu AC un unghi de 60°. Urmează că $MN = PQ$ și $MN \parallel PQ$, deci $MNPQ$ este paralelogram. Nu este exclusă posibilitatea ca paralelogramul $MNPQ$ să fie degenerat.



132. Fie ABO un triunghi echilateral de centru S iar $A'B'O$ alt triunghi echilateral, în același plan cu $A' \neq S$, $B' \neq S$, astfel încît unghiurile $A'OB$ și AOB au aceeași orientare. Fie M mijlocul lui $A'M$ și N cel al lui AB'. Să se demonstreze că triunghiurile $SB'M$ și $SA'N$ sînt asemenea.

dată la OIM, 1978

Soluție

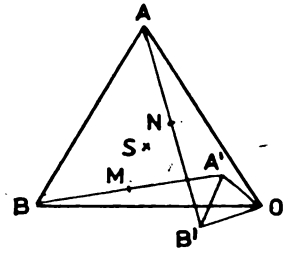
Din N se ajunge în A' printr-o omotetie de centru A și raport 2 (ce duce N în B') și apoi o rotație în jurul lui O în sens invers trigonometric duce pe B' în A. Omotetia îl transformă pe S în simetricul S' al lui A față de B, iar rotația îl transformă pe S' în S. Deci:

(1) $\sphericalangle NSA' = 60°$ și $\dfrac{SA'}{SN} = 2$.

Un raționament analog conduce la:

(2) $\sphericalangle MSB' = 60°$ și $\dfrac{SB'}{SB} = 2$

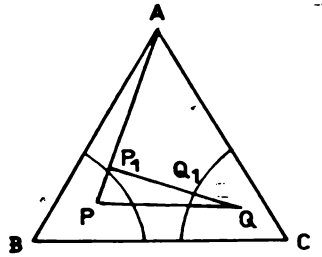
Din (1) și (2) rezultă că triunghiurile sînt asemenea, dar orientate contrar.



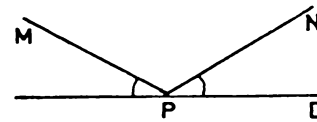
133. Un soldat trebuie să verifice absența minelor pe un teren în formă de triunghi echilateral. Raza de acțiune a detectorului său este egală cu jumătate din înălțimea triunghiului. Soldatul pornește din unul din vîrfurile triunghiului. Ce drum trebuie să urmeze soldatul pentru ca în momentul cînd întreg terenul a fost cercetat drumul parcurs să fie minim posibil?

(OIM, 1973)

Soluţie dată în concurs de Alexandru Buium.
Partea 1–a.



a)

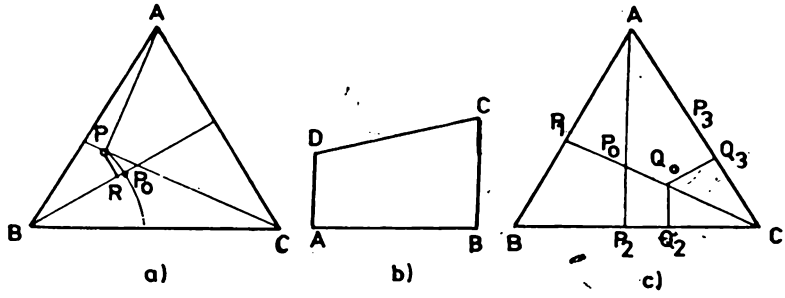


b)

Fie ABC triunghiul. Dacă soldatul pleacă din A, el trebuie să verifice absenţa minelor atît din B cît şi din C. Să presupunem că va verifica aceasta întîi pentru B, apoi pentru C. Fie Γ clasa drumurilor ce pleacă din A şi la sfîrşitul întregului parcurs triunghiul a fost cercetat în întregime, punctul B fiind cercetat înaintea lui C şi Δ clasa formată din drumurile care au cel puţin un punct comun cu $\mathcal{C}(B, \frac{h}{2})$ şi cu $\mathcal{C}(C, \frac{h}{2})$ (h înălţimea) însă cel comun lui $\mathcal{C}(B, \frac{h}{2})$ fiind cercetat înaintea celui comun lui $\mathcal{C}(C, \frac{h}{2})$. Evident $\Gamma \subset \Delta$. Dacă $l(\gamma)$ este lungimea drumului γ pe noi ne interesează $\inf_{\gamma \in \Gamma} l(\gamma)$. Noi vom determina $\inf_{\gamma \in \Delta} l(\gamma)$ şi vom arăta că aceasta se atinge pentru $\gamma \in \Gamma$, astfel $\inf_{\gamma \in \Gamma} l(\gamma) = \inf_{\gamma \in \Delta} l(\gamma)$.

Fie $\gamma \in \Delta$, P şi Q punctele comune dintre γ şi cele două cercuri. Este clar că linia APQ este mai scurtă decît γ, apoi că dacă P_1 este intersecţia dintre AB şi $\mathcal{C}(B, \frac{h}{2})$, $l(APQ) \geq l(AP_1Q)$ în fine că $l(AP_1Q) \geq l(AP_1Q_1)$ unde $\{Q_1\} = P_1Q \cap \mathcal{C}(C, \frac{h}{2})$. Deci va trebui să găsim $\inf l(APQ)$ cînd P parcurge $\mathcal{C}(B, \frac{h}{2})$ iar Q parcurge $\mathcal{C}(C, \frac{h}{2})$. Avem $l(APQ) = l(APQC) - \frac{h}{2}$. În plus, $l(APQC) \geq l(APC)$. Am redus problema la a găsi un punct P pe $\mathcal{C}(B, \frac{h}{2})$ încît $l(APC)$ să fie minim posibil.

Partea a 2–a.
Se ştie că dacă M şi N sînt situate în planul unei drepte D minimul $MP + PN$ cînd P parcurge D este realizat cînd MF şi PN fac unghiuri egale cu D. În cazul nostru, dacă



ducem prin P o paralelă la AC care taie înălțimea din B în R, dreptele AR și CR vor face unghiuri egale cu PR, deci $AP + PC \geq AR + CR$. Dacă P_0 este intersecția înălțimii din B cu $\mathcal{C}(B, \frac{h}{2})$ atunci R este în interiorul circumferinței, deci $AR + CR \geq AP_0 + CP_0$. În concluzie $l(APC)$ cînd P parcurge $\mathcal{C}(B, \frac{h}{2})$ este realizat pentru $P = P_0$ iar $\inf l(\gamma)$, $\gamma \in \Delta$ este realizat pentru drumul γ_0 egal cu linia frîntă AP_0Q_0 unde Q_0 este intersecția lui P_0C cu $\mathcal{C}(C, \frac{h}{2})$.

Partea a 3−a

Să arătăm că $\gamma \in \Gamma$ deci că întreg triunghiul este acoperit. Pentru aceasta observăm că într−un trapez dreptunghic $ABCD$ dacă AD și $BC \leq \frac{h}{2}$, atunci distanța de la orice punct M de pe DC la AB este $\leq \frac{h}{2}$, deci cînd centrul unui cerc de rază $\frac{h}{2}$ parcurge DC, cercul acoperă tot trapezul. Să considerăm triunghiul din problemă și drumul γ_0 și fie P_1, P_2, P_3 picioarele perpendicularelor din P_0 pe laturile triunghiului, iar Q_2, Q_3 picioarele perpendicularelor din R_0 pe laturile ce pleacă din C. Avem $P_0B = \frac{h}{2}$ deci $P_0P_1 \leq \frac{h}{2}$. Prin construcția lui P_0 avem $P_0P_3 = \frac{h}{2}$. Observația de mai sus arată că prin mișcarea detectorului pe AP_0 triunghiurile AP_0P_1 și AP_0P_3 sînt cercetate. $P_0P_1 \leq \frac{h}{2}$, $P_0B = \frac{h}{2}$, iar $P_0P_2 \leq P_0B = \frac{h}{2}$ deci cînd detectorul este în P_0 porțiunea $BP_1P_0P_2$ este cercetată. Avem $Q_0C = \frac{h}{2}$, $QQ_3 \leq Q_0C = \frac{h}{2}$, $QQ_2 \leq Q_0C = \frac{h}{2}$

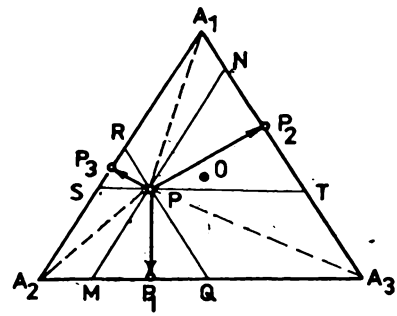
ceea ce arată că detectorul fiind în Q_o, porțiunea $Q_oG_2CQ_3$ este cercetată. P_oP_3, $P_oP_2 \leq \frac{h}{2}$, Q_oQ_3, $Q_oQ_2 \leq \frac{h}{2}$ și prin mișcarea detectorului pe P_oQ_o porțiunile $P_oP_2Q_2Q_o$ și $P_oP_3Q_3Q_o$ sînt cercetate. Aceasta încheie demonstrația faptului că $\gamma \in \Gamma$ deci AP_oQ_o este drumul cerut de problemă.

CAPITOLUL 5

PROBLEME DE CALCUL VECTORIAL

134. Fie P un punct în interiorul unui triunghi echilateral de centru O. Notăm cu P_1, P_2, P_3 proiecțiile lui P pe laturile triunghiului. Să se arate că :

$$\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_3} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PO}$$



Soluție

Fie $A_1A_2A_3$ triunghiul echilateral. Prin P ducem paralele la laturile triunghiului, iar notațiile ca în figura de mai jos: Evident că triunghiul PMQ este echilateral, iar PP_1 este mediană. Urmează că:

(1) $2\overrightarrow{PP_1} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PQ}$

Analog

(2) $2\overrightarrow{PP_2} = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{PN}$

(3) $2\overrightarrow{PP_3} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PR}$

Sumînd relaţiile (1), (2) şi (3) obţinem:

(4) $2(\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_3}) = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PT}) + (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PR}) + (\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PM}) =$
$= \overrightarrow{PA_3} + \overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2}$

Deci:

(5) $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \overrightarrow{PA_3})$

Dar $\overrightarrow{PA_1} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_1}$; $\overrightarrow{PA_2} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_2}$; $\overrightarrow{PA_3} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_3}$ care prin sumare dau: $\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \overrightarrow{PA_3} = 3\overrightarrow{PO}$ deoarece $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = 0$ întrucît O este centrul de greutate al triunghiului. Deci $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_3} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PO}$

135. Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi echilateral de centru O, iar P un punct în interiorul triunghiului. Notăm cu P_1, P_2, P_3 proiecţiile lui P pe laturi iar cu M_1, M_2, M_3 mijloacele laturilor. Să se arate că:

$$\overrightarrow{P_1M_1} + \overrightarrow{P_2M_2} + \overrightarrow{P_3M_3} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PO}.$$

Soluţie

Din trapezul PP_1M_1O avem:

(1) $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{P_1M_1} + \overrightarrow{M_1O}$

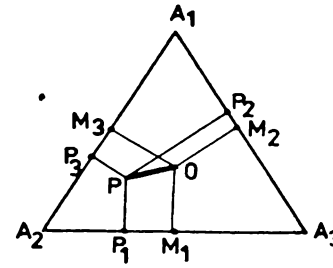
Scriind încă două relaţii analoage şi sumînd relaţiile obţinem:

(2) $3\overrightarrow{PO} = (\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_3}) + (\overrightarrow{P_1M_1} + \overrightarrow{P_2M_2} + \overrightarrow{P_3M_3}) + (\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3})$

Dar $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}) = 0$, iar $\overrightarrow{P_1P} + \overrightarrow{P_2P} + \overrightarrow{P_3P} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PO}$, conform problemei 134.

Urmează atunci din (3) că:

$$\overrightarrow{P_1M_1} + \overrightarrow{P_2M_2} + \overrightarrow{P_3M_3} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PO}.$$



136. Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi echilateral, iar P un punct în interiorul triunghiului. Notăm cu P_1, P_2, P_3 proiecţiile lui P pe laturi. Să se arate că dacă P este centrul de greutate al triunghiului $P_1P_2P_3$ atunci P coincide cu centrul triunghiului.

Soluţie

Fie O centrul triunghiului. Conform problemei 134 avem relaţia:

(1) $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_3} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PO}$

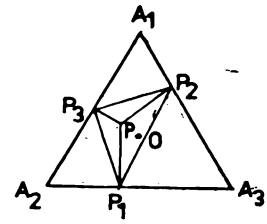
Dacă P este centrul de greutate al triunghiului $P_1P_2P_3$ atunci:

(2) $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_3} = 0$

Din (1) şi (2) rezultă $\overrightarrow{PO} = 0$, adică $P \equiv O$.

Observaţie.

Această problemă este un caz particular al următoarei teoreme aparţinînd matematicianului Lemoine: "Un punct P interior unui triunghi este centrul de greutate al triunghiului său podar, dacă şi numai dacă P coincide cu punctul Lemoine al triunghiului."



137. Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi echilateral de centru O, iar P un punct în interiorul triunghiului. Notăm cu P_1, P_2, P_3 proiecţiile lui P pe laturile triunghiului. Să se arate că:

a) Atunci cînd P se mişcă pe un cerc de centru O, interior triunghiului, sumele

$S_1 = PP_1 \cdot PP_2 + PP_2 \cdot PP_3 + PP_3 \cdot PP_1$ şi $S_2 = PP_1^2 + PP_2^2 + PP_3^2$ sînt constante.

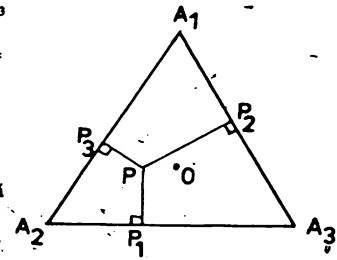
b) $S_1 \geq \frac{l^2}{4}$, unde l este latura triunghiului.

C. Cocea

Soluţie

Este evident că $\sphericalangle P_3PP_1 = \sphericalangle P_1PP_2 = \sphericalangle P_2PP_3 = 120°$. Deci:

$\cos \sphericalangle P_3PP_1 = \cos \sphericalangle P_1PP_2 = \cos \sphericalangle P_3PP_2 = -\frac{1}{2}$. Deoarece



(1) $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_3} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PO}$

prin efectuarea pătratului scalar din (1) rezultă că:

(2) $PP_1^2 + PP_2^2 + PP_3^2 - (PP_1 \cdot PP_2 + PP_1 \cdot PP_3 + PP_2 \cdot PP_3) = \frac{9}{4}PO^2$

Dar conform problemei 13 avem:

(3) $PP_1 + PP_2 + PP_3 = h = l\frac{\sqrt{3}}{2}$ (h înălţimea triunghiului)

Din (2) şi (3) rezultă:

(4) $(PP_1 + PP_2 + PP_3)^2 - 3S_1 = \frac{9}{4}PO^2$

sau, avînd în vedere (3), rezultă

(5) $S_1 = \frac{l^2 - 3PO^2}{4}$, de unde $S_1 \geq \frac{l^2}{4}$.

Avem:

(6) $S_2 = (PP_1 + PP_2 + PP_3)^2 - 2S_1 = \frac{3l^2}{4} - \frac{2(l^2 - 3PO^2)}{4} = \frac{l^2 + 6PO^2}{4}$.

Dacă PO = constant din expresiile lui S_1 și S_2 rezultă că aceste sume sînt constante.

138. Se dau două triunghiuri echilaterale ABC și A'B'C' de același centru O. Din centrul O construim vectorii $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ echipolenți cu $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ respectiv $\overrightarrow{CC'}$. Să se arate că triunghiul MNP este echilateral.

Dorinel Anca

Soluție

Fiind dată o rotație de centru Ω și unghi φ, $\vec{v}$ un vector cu originea în Ω, $\vec{v} = \overrightarrow{\Omega M}$; notăm prin $\vec{v}_\varphi$ vectorul $\overrightarrow{\Omega M_\varphi}$ unde M_φ este transformatul lui M prin rotația considerată. Evident $\|\vec{v}\| = \|\vec{v}_\varphi\|$ și pentru doi vectori cu originea în Ω are loc $\vec{u}_\varphi \cdot \vec{v}_\varphi = \vec{u} \cdot \vec{v}$ deoarece rotația păstrează unghiurile.

Să remarcăm că putem presupune că triunghiurile au același centru deoarece printr-o transalație de vector $\overrightarrow{O'O}$ se păstează distanțele și unghiurile.

Fie $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OA'} = \vec{v}$. Rezultă $\overrightarrow{OM} = \vec{v} - \vec{u}$; $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB} = \vec{v}_{\frac{2\pi}{3}} - \vec{u}_{\frac{2\pi}{3}}$ și $\overrightarrow{OP} = \vec{v}_{\frac{4\pi}{3}} - \vec{u}_{\frac{4\pi}{3}}$

Avem: $OM^2 = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM} = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\vec{v}$

$ON^2 = \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{ON} = \left\|\vec{v}_{\frac{2\pi}{3}}\right\|^2 + \left\|\vec{u}_{\frac{2\pi}{3}}\right\|^2 - 2\vec{u}_{\frac{2\pi}{3}}\vec{v}_{\frac{2\pi}{3}} = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\vec{v} = OM^2$

Deci OM = ON = OP. Pe de altă parte,

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = (\vec{v} - \vec{u})\left(\vec{v}_{\frac{2\pi}{3}} - \vec{u}_{\frac{2\pi}{3}}\right) = \|\vec{v}\|^2 \cos\frac{2\pi}{3} + \|\vec{u}\|^2 \cos\frac{2\pi}{3} - \vec{u}\vec{v}_{\frac{2\pi}{3}} - \vec{v}\vec{u}_{\frac{2\pi}{3}}.$$

Observînd că

$$\vec{v}_\varphi \cdot \vec{u} + \vec{u}_\varphi \cdot \vec{v} = 2\vec{u} \cdot \vec{v} \cos\varphi$$

rezultatele anterioare conduc la:

$$\cos(\sphericalangle(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}{|OM| \cdot |ON|} = \cos\frac{2\pi}{3}.$$

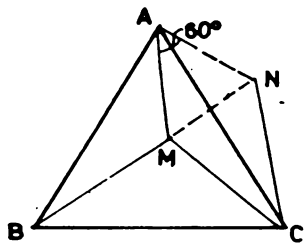
Rezultă că triunghiul MNP este echilateral.

CAPITOLUL 6

PROBLEME LEGATE DE TEOREMA LUI POMPEIU

139. Cu distanţele unui punct la vîrfurile unui triunghi echilateral din acelaşi plan putem forma un triunghi.

TEOREMA LUI POMPEIU



Soluţia 1.

Fie ABC triunghiul echilateral respectiv, iar A(1), B(ω), C(ω^2), M(z) unde 1, ω, ω^2 sînt rădăcinile ecuaţiei

$$z^3 - 1 = 0.$$

Avem:

$$(z - 1) + \omega(z - \omega) + \omega^2(z - \omega^2) = 0$$

De unde

$$\omega(z - \omega) + \omega^2(z - \omega^2) = -(z - 1)$$

Trecînd la module:

$$MB + MC \geq MA$$

Analog încă două inegalităţi.

Observaţia 1.

Se poate demonstra utilizînd inegalitatea lui Ptolemeu că triunghiul este degenerat numai cînd M se află pe cercul circumscris triunghiului echilateral .

Soluţia a 2-a. (geometrică).

Aplicăm triunghiului ABM o rotaţie de unghi 60° şi centru A. Notăm R(M) = N. Evident triunghiul AMN este echilateral . R(A) = A, R(B) = C. Deci triunghiul ABM s-a transformat în triunghiul ANC. Cum MN = AM, NC = MB, MC = NC, rezultă că triunghiul MNC este de laturi MA, MB, MC.

Observaţia 2.

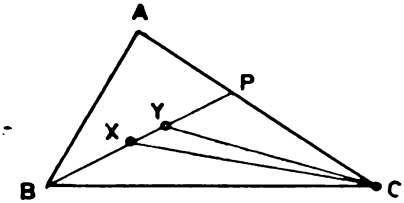
Teorema se poate extinde pentru poligoane regulate. A se vedea GMB 10/1987 (articolul "Extinderi ale teoremei lui Dimitrie Pompeiu" de prof. Marian Dincă).

140. Dacă pentru orice punct M din interiorul unui triunghi ABC cu segmentele (MA), (MB), (MC) se poate forma un triunghi, atunci ABC este echilateral .

RECIPROCA TEOREMEI LUI POMPEIU

Soluţie

Să presupunem că ABC nu este echilateral.



Fără a restrînge generalitatea putem considera AB < BC. Fie P ∈ (AC).

Definim funcţiile:

$f : [BP] \to R \quad f(x) = d(C,x)\ (\forall) \ x \in [BP]$

$g : [BP] \to R \quad g(x) = d(A,x) + d(B,x)$

Să arătăm că f,g sînt continue.

Fie $y \in [BP]$ şi $d(x,y) = a < \varepsilon$

Atunci $| f(y) - f(x) | =$

$= | d(C,y) - d(C,x) | < a < \varepsilon$

Deci f este continuă.

Analog g este continuă ca sumă de funcţii continue. Dar f(B) = d(B,C), g(B) = d(A,B), deci f(B) > g(B).

Din continuitatea lui f şi g în B rezultă că există $Q \in [BP]$ încît $(\forall)x \in [BQ]$ f(x) > g(x). Fie $S \in [BQ]$ f(S) > g(S) ⇔ CS > SA + SB.

Am ajuns la contradicţie, deci ABC este echilateral .

141. Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi echilateral , avînd laturile de lungime l, M un punct din spaţiu situat la distanţa h de planul triunghiului şi $MA_i = a_i$ (i = 1, 2, 3). Dacă h > l, atunci a_i^2 sînt lungimile laturilor unui triunghi.

Conf. dr. I. Pop

Soluţia autorului.

Demonstrăm mai întîi următoarea lemă:

LEMĂ.

Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi echilateral, avînd laturile de lungime l şi M un punct oarecare în planul triunghiului. Atunci:

$$MA_j^2 - \sum_{i \neq j} MA_i^2 \leq l^2 \quad (\forall)\ j=1,2,3$$

Demonstrație.

Putem presupune că $A_i(R\varepsilon_i)$, unde ε_i, $i = 1, 2, 3$ sînt rădăcinile cubice ale unității și M(z). Atunci:

$$D_j = MA_j^2 - \sum_{i\neq j} MA_i^2 = |z - R\varepsilon_j|^2 - \sum_{i\neq j} |z - R\varepsilon_i|^2 =$$

$$= (z - R\varepsilon_j)(\bar{z} - R\bar{\varepsilon}_j) - \sum_{i\neq j} (z - R\varepsilon_i)(\bar{z} - R\bar{\varepsilon}_i) =$$

$$= |z|^2 - Rz\bar{\varepsilon}_j - R\bar{z}\varepsilon_j + R^2 - \sum_{i\neq j}\left[|z|^2 - Rz\bar{\varepsilon}_i - R\bar{z}\varepsilon_i + R^2\right] =$$

$$= -|z|^2 - R(z\bar{\varepsilon}_j + \bar{z}\varepsilon_j) - R^2 + Rz\sum_{i\neq j}\bar{\varepsilon}_i + R\bar{z}\sum_{i\neq j}\varepsilon_i$$

Deoarece $\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_k = 0$ avem $\sum_{i\neq j} \varepsilon_i = -\varepsilon_j$, încît obținem:

$$D_j = -|z|^2 - 4R\cdot Re(z\,\bar{\varepsilon}_j) - R^2$$

Pe de altă parte $|z|^2 = |z\bar{\varepsilon}_j|^2 \geq (Re(z\bar{\varepsilon}_j))^2$ și prin urmare:

$$D_j \leq -(Re(z\bar{\varepsilon}_j))^2 - 4RRe(z\bar{\varepsilon}_j) - R^2 = -\left[Re(z\bar{\varepsilon}_j)+2R\right]^2 + 3R^2 \leq$$

$$\leq 3R^2 = l^2$$

Să trecem acum la rezolvarea problemei. Fie N proiecția ortogonală a punctului M pe planul triunghiului $A_1A_2A_3$.

Avem: $MA_k^2 = NA_k^2 + h_k^2$ și prin urmare

$$\sum_{i\neq j} MA_i^2 - MA_j^2 = \sum_{i\neq j} NA_i^2 - NA_j^2 + h^2 \geq -l^2 + h^2.$$

Dacă $h > l$ $\sum_{i\neq j} MA_i^2 - MA_j^2 > 0$, ceea ce arată că cu lungimile a_1^2, a_2^2, a_3^2 putem forma un triunghi.

142. Să se arate că locul geometric al punctelor din interiorul unui triunghi echilateral ABC pentru care cu distanțele la laturi putem forma un triunghi nedegenerat, este interiorul triunghiului format de mijloacele laturilor triunghiului ABC.

Soluție

Fie A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA respectiv AB, iar $M \in Int(A'B'C')$, oarecare. Notăm cu x, y, z distanțele de la M la laturile triunghiului ABC. Prin M ducem paralela EF la BC. Conform unei proprietăți cunoscute, $y + z = h_1$ - înălțimea triunghiului AEF. Cum înălțimea lui AEF este mai mare decît înălțimea lui AB'C' avem $h_1 > h/2$, unde h este înălțimea triunghiului ABC. Deoarece M este în interiorul trapezului BCB'C' rezultă $x < h/2$.

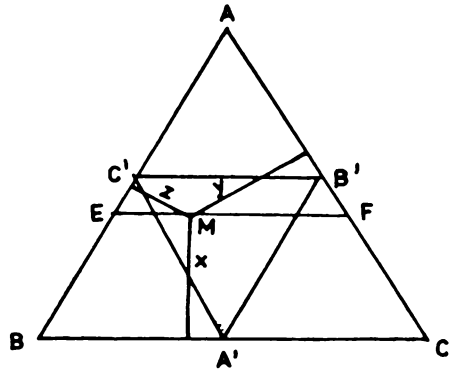
Deci $y + z = h_1 > h/2 > x$.

Analog se dovedesc încă două inegalități. Deci orice punct din interiorul triunghiului A'B'C' aparține locului geometric. Dacă $M \in Int(AB'C')$ procedînd analog se deduce $y + z < h/2 < x$ la fel cînd $M \in Int(BC'A')$ sau $M \in Int(CA'B')$.)

Așadar locul geometric este Int(A'B'C').

Observaţii:

1) Problema admite o generalizare pentru un triunghi oarecare, generalizare aparţinînd academiceanului Gh. Mihoc. Ea are următorul enunţ:
"Locul geometric al punctelor din interiorul unui triunghi oarecare pentru care cu distanţele la laturi putem forma un triunghi nedegenerat, este interiorul triunghiului format de picioarele bisectoarelor"



2) O generalizare foarte frumoasă, în spaţiu a fost dată de prof. dr. Ioan Tomescu (a se vedea [4] pag. 211
Enunţul este următorul:
"Pentru un tetraedru ABCD, locul geometric al punctelor din interiorul tetraedrului ale căror distanţe la feţele tetraedrului pot fi lungimile laturilor unui patrulater este mulţimea punctelor interioare ale unui poliedru cu şase vîrfuri, care se obţin prin intersecţia planelor bisectoare ale unghiurilor diedre formate de cele şase perechi de feţe ale tetraedrului cu muchiile opuse.

143. Fie P un punct din interiorul triunghiului echilateral ABC, astfel încît PA = u, PB = v, PC = w. Să se calculeze lungimea s a laturilor triunghiului ABC în funcţie de u,v,w.

Soluţie

Rotim triunghiul ABP cu 60° în jurul lui A. Triunghiul ABP trece în ACP'. Deci P'C = PB. În plus, triunghiul APP' este echilateral , deci PP' = AP. Din triunghiul CPP' putem deduce $\hat{V} = \sphericalangle P'PC$

(1) $\cos V = \frac{u^2+w^2-v^2}{2uv}$

Acum din $\triangle APC$ cu ajutorul teoremei cosinusului

$s^2 = u^2 + w^2 - 2uv \cos(60° + v)$

sau:

(2) $s^2 = u^2 + w^2 - 2uv$

$\cdot \cos\left(\frac{1}{2}\cos V - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin V\right)$

Din (1) deducem:

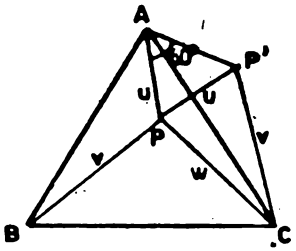
(3) $\sin V =$

$= \frac{1}{2uv}\sqrt{(u^2+v^2+w^2)^2 - 2(u^4+v^4+w^4)}$

Înlocuind cos V şi sin V în (2) rezultă:

$s^2 = \frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2) + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cdot \sqrt{(u^2+v^2+w^2)^2 - 2(u^4+v^4+w^4)}$



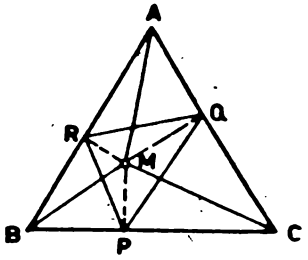
144. Fie ABC un triunghi echilateral şi M un punct în interiorul său. Să se determine M astfel încît aria triunghiului format cu segmentele AM, BM, CM să fie maximă.

Soluţie

Fie P, Q, R proiecţiile lui M pe laturile triunghiului. Din patrulaterul înscriptibil ARMQ rezultă:

$$MA = RQ\cdot\sin A = RQ\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Analog $MB = PR\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $MC = QP\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Segmentele MA, MB, MC fiind proporţionale cu laturile triunghiului podar corespunzător lui M înseamnă că aria maximă a triunghiului format de MA, MB, MC se realizează cînd aria triunghiului PQR este maximă. Dar conform problemei 69, aria triunghiului podar corespunzător lui M este maximă cînd M = O - centrul cercului circumscris triunghiului.

Notă.

a) În lucrarea [14] se demonstrează că aria triunghiului podar al unui punct M interior unui triunghi oarecare este maximă cînd M = O - centrul cercului circumscris.

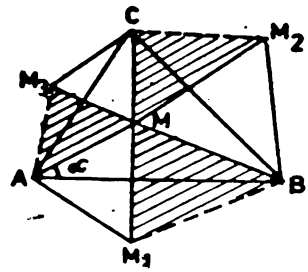
b) În lucrarea [20], pag.177, cititorul poate găsi o soluţie analitică a problemei.

145. Fie ABC un triunghi echilateral cu latura a şi M un punct în planul triunghiului la distanţa *d* de centrul triunghiului ABC. Arătaţi că aria triunghiului ale cărui laturi sînt egale cu lungimile segmentelor MA, MB, MC este dată de expresia:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{12}|a^2 - 3d^2|.$$

Soluție

Construim triunghiurile echilaterale AMM_1, BMM_2, CMM_3.



Cum: $\left.\begin{array}{l} AM_1 = AM \\ AB = AC \\ \sphericalangle M_1AB = \sphericalangle MAC = 60° - \alpha \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \Delta AM_1B \equiv \Delta AMC$

Analog $\Delta BM_2C \equiv \Delta BMA$ și $\Delta CM_3A \equiv \Delta CMB$.

Rezultă că $S_{AM_1B} + S_{BM_2C} + S_{CM_3A} = S_{ABC}$

Deci: $S_{AM_1BM_2CM_3A} = S_{ABC} + S_{ABC} = 2S_{ABC}$.

Dar $\left.\begin{array}{l} \Delta AM_1B \equiv \Delta AMC \Rightarrow M_1B = MC \\ \Delta AMM_1 \text{ echilateral} \Rightarrow MM_1 = MA \\ MB = MB \end{array}\right\}$

$\Rightarrow S_{MM_1B} = S$

Analog, $S_{CMM_2} = S_{AMM_3} = S$, unde S este aria triunghiului de laturi MA, MB, MC.

Rezultă:

$$S_{AM_1BM_2CM_3A} = 2S_{ABC} = 3S + S_{AMM_1} + S_{BMM_2} + S_{CMM_3}.$$

Deci:

$$\frac{2a^2\sqrt{3}}{4} = 3S + \frac{MA^2\sqrt{3}}{4} + \frac{MB^2\sqrt{3}}{4} + \frac{MC^2\sqrt{3}}{4}$$

adică:

$$(1)\ \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 3S + \frac{\sqrt{3}}{4}(MA^2+MB^2+MC^2)$$

Dar din relația lui Leibniz avem:

$$MA^2+MB^2+MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}(AB^2+AC^2+BC^2)$$

Rezultă:

$$(2)\ MA^2+MB^2+MC^2 = 3d^2+a^2$$

Înlocuind în (1) obținem:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2-3d^2)$$

Analog și pentru cazul cînd M este în exterior.

146. Fie două triunghiuri echilaterale ABC și A'B'C' de centrul O și O'. Găsiți locul geometric al punctului M încît cele două triunghiuri formate cu lungimile segmentelor MA,MB,MC și respectiv MA_1, MB_1, MC_1 să aibă aceeași arie.

Soluţie

Conform problemei 145 avem:

$$S_1 = \frac{3}{12}\left|a_1^2 - 3d_1^2\right| \quad S = \frac{3}{12}\left|a^2 - 3d^2\right| \Rightarrow \left|a_1^2 - 3d_1^2\right| = \left|a^2 - 3d^2\right|$$

Cazul I.

$$\left.\begin{matrix} a^2 - 3d^2 \geq 0 \\ a_1^2 - 3d_1^2 \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d_1^2 - d^2 = \frac{a_1^2 - a^2}{3}$$

Cum a, a_1 sînt constante rezultă $d_1^2 - d^2$ = constant.

$$\left.\begin{matrix} MO_1^2 - MO^2 = ct \\ O_1, O \text{ fixe} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ locul geometric al lui M este o dreaptă perpendiculară pe OO_1.

Cazul II.

$$\left.\begin{matrix} a^2 - 3d^2 \geq 0 \\ a_1^2 - 3d_1^2 \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^2 - 3d^2 = 3d_1^2 - a_1^2 \Rightarrow d^2 + d_1^2 = \frac{a^2 + a_1^2}{3}$$

Cum a, a_1 sînt constante $\Rightarrow d^2 + d_1^2 = ct$. $MO^2 + MO_1^2$ = constant = K^2

Fie R mijlocul lui OO_1. Rezultă: $4MR^2 + OO_1^2 = 2K^2$.

Deci MR constant prin urmare locul geometric al lui M este un cerc de centru O şi rază

$$R = \frac{2K^2 - OO_1^2}{4}$$

Cazul III.

$\left.\begin{matrix} a^2 - 3d^2 < 0 \\ a_1^2 - 3d_1^2 < 0 \end{matrix}\right\}$ se tratează la fel cu cazul I

Cazul IV.

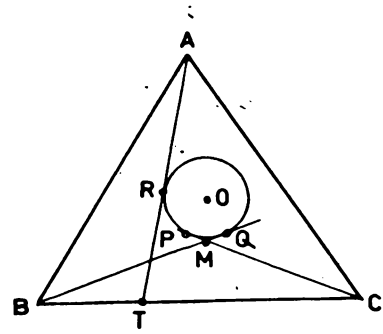
$\left.\begin{matrix} a^2 - 3d^2 < 0 \\ a_1^2 - 3d_1^2 \geq 0 \end{matrix}\right\}$ se tratează ana- log cu cazul II

147. Fie ABC un triunghi echilateral şi $\mathscr{C}$ un cerc interior triunghiului. Să se arate că se poate construi un triunghi avînd lungimile laturilor egale cu lungimile tangentelor din A, B, C la cercul $\mathscr{C}$

C. Cocea

Soluţie

Este evident că o tangentă din B şi o tangentă din C se intersectează; fie M punctul lor de intersecţie. Restul notaţiilor se pot vedea pe figură.



Avem:

$BQ + CP = BQ + CM + MP =$

$= BQ + CM + MQ > BQ + CQ >$

BC.

Dar $AR < AT$. Cum $AT < AB$, deoarece este mai apropiată de piciorul perpendicularei din A faţă de AB, rezultă

$AT < AB = BC < BQ + CP$

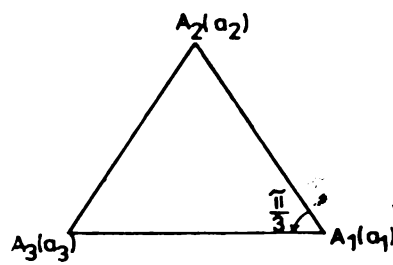
Observaţie.

Cînd cercul degenerează într-un punct, obţinem tocmai teorema lui Pompeiu (pentru cazul cînd punctul este interior triunghiului).

CAPITOLUL 7

PROBLEME REZOLVATE CU NUMERE COMPLEXE

148. Fie a_1, a_2, a_3 afixele vîrfurilor $A_1A_2A_3$ orientate pozitiv.
Atunci triunghiul $A_1A_2A_3$ este echilateral $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a_3 - a_1 = \varepsilon(a_2 - a_1)$, unde
$\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}$



Soluție

Triunghiul ABC este echilateral și orientat pozitiv dacă și numai dacă A_1A_3 se obține din A_1A_2 printr-o rotație de unghi $\frac{\pi}{3}$ în jurul lui A_1 (vezi figura). Deci: $a_3 = a_1 + \varepsilon(a_2 - a_1)$ unde: $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}$

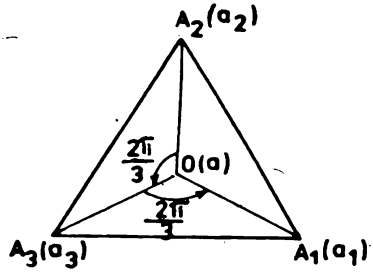
149. Numerele complexe a_1, a_2, a_3 (distincte) sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral dacă şi numai dacă:

$$(a_1 + \omega a_2 + \omega^2 a_3)(a_1 + \omega^2 a_2 + \omega a_3) = 0.$$

Soluţie

Fie $O(a)$, $A_1(a_1)$, $A_2(a_2)$, $A_3(a_3)$

1. Deoarece A_2 se obţine din A_1 printr-o rotaţie de unghi $\frac{2\pi}{3}$ în jurul lui O şi la fel A_3 din A_2, avem:



$a_2 = a + \omega(a_1 - a)$

$a_3 = a + \omega(a_2 - a) = a + \omega^2(a_1 - a)$,

unde $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$, iar

$1 + \omega + \omega^2 = 0$ şi $\omega^3 = 1$.

Deci:

$a_1 + \omega a_2 + \omega^2 a_3 = a_1 + \omega a + \omega^2 a_1 - \omega^2 a + \omega^2 a + \omega a_1 - \omega a =$

$= a_1(1 + \omega + \omega^2) = 0$

Dacă orientarea ar fi fost alta, am fi obţinut analog

$a_1 + \omega^2 a_2 + \omega a_3 = 0$.

2) Presupunem de exemplu că $a_1 + \omega a_2 + \omega^2 a_3 = 0$. Avem:

$a_1 + \omega a_2 + \omega^2 a_3 - (a_1 + \omega a_1 + \omega^2 a_1) = 0$

sau

$\omega(a_2 - a_1) = -\omega^2(a_3 - a_1)$.

Trecînd la module rezultă, $|a_2 - a_1| = |a_3 - a_1|$ deci, $A_1A_2 = A_1A_3$.

La fel: $a_1 + \omega a_2 + \omega^2 a_3 - (a_2 + \omega a_2 + \omega^2 a_2) = 0$.

De unde: $a_1 - a_2 = -\omega^2(a_3 - a_2)$. De unde, $|a_1 - a_2| = |a_3 - a_2|$ deci $A_1A_2 = A_2A_3$

Prin urmare $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_1$, deci ΔABC este echilateral.

Observaţie.

Deoarece $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = (a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c)$ rezultă că condiţia necesară şi suficientă ca un triunghi să fie echilateral este ca între afixele vîrfurilor să existe relaţia: $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$.

150. Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi cu afixele vîrfurilor z_1, z_2, z_3. Să se arate că triunghiul $A_1A_2A_3$ este echilateral dacă şi numai dacă afixul z al centrului de greutate satisface relaţia:

$$\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \frac{1}{z - z_3} = 0.$$

Soluţie

Avem $z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$. Relaţia din enunţ este echivalentă cu:

$$\frac{3}{-2z_1 + z_2 + z_3} + \frac{3}{z_1 - 2z_2 + z_3} + \frac{3}{z_1 + z_2 - 2z_3} = 0$$

Împărţind prin 3, aducînd la acelaşi numitor şi reducînd termenii asemenea, obţinem relaţia:

(1) $-z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = 0$.

sau

(2) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_1z_3 - z_2z_3 = 0$

echivalentă cu

(3) $(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0$

şi astfel am redus problema la problema 149, care demonstrează că (3) este necesară şi suficientă pentru ca $A_1A_2A_3$ să fie echilateral.

151. Dacă $|a_1| = |a_2| = |a_3|$ şi $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ atunci a_1, a_2, a_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral şi reciproc (a_1, a_2, a_3 sînt considerate distincte două cîte două).

Soluţie

Fie O(0) originea sistemului şi $A_1(a_1)$, $A_2(a_2)$, $A_3(a_3)$. Deoarece $|a_1| = |a_2| = |a_3|$, O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Centrul de greutate G al triunghiului are afixul

$g = \frac{a_1+a_2+a_3}{3} = 0$ deci G ≡ O, de unde rezultă că ABC este echilateral. Reciproc, dacă a_1, a_2, a_3 sînt afixele vîrfurilor triunghiului echilateral, alegînd originea sistemului în centrul cercului circumscris rezultă G ≡ O, deci $g = \frac{a_1+a_2+a_3}{3} = 0$ şi $|a_1| = |a_2| = |a_3| = R$.

152. Fie a, b, c ∈ C* afixele vîrfurilor unui triunghi ABC. Dacă $a^2 = bc$ şi $b^2 = ca$, atunci triunghiul ABC este echilateral, orientat pozitiv.

C. Cocea

Soluţie

Înmulţind membru cu membru cele două relaţii şi simplificînd găsim că $c^2 = ab$. Din

(1) $a^2 = bc$

(2) $b^2 = ca$

(3) $c^2 = ab$

prin înmulţire cu a,b respectiv c, obţinem:

(4) $a^3 = b^3 = c^3 = abc$.

Notînd $abc = \rho$, din (4) rezultă că a, b, c sînt rădăcinile ecuaţiei:

(5) $z^3 = \rho$, deci a, b, c sînt afixele unui triunghi echilateral.

Din (4) rezultă $|a| = |b| = |c|$, deci originea sistemului este O centrul cercului circumscris, triunghiului ABC. Putem considera că raza este egală cu unitatea. Dacă A(1), B(ω), C(ω^2) relaţiile din enunţ se verifică. Dacă ABC este invers orientat adică A(1), B(ω^2), C(ω), relaţia $b^2 = ca$ este echivalentă cu $\omega^2 = \omega$ fals, deci triunghiul ABC nu poate fi orientat negativ. Aşadar, ABC este triunghi echilateral orientat pozitiv.

153. Fie a, b, c ∈ C* afixele vîrfurilor unui triunghi ABC. Dacă $a\bar{b} = b\bar{c} = c\bar{a}$, atunci triunghiul ABC este echilateral orientat pozitiv.

C. Cocea

Soluție

În relațiile

(1) $a\bar{b} = b\bar{c} = c\bar{a}$

trecînd la module obținem:

(2) $|a| \cdot |b| = |b| \cdot |c| = |c| \cdot |a|$ de unde

(3) $|a| = |b| = |c| = r$

Avem $\bar{a} = \frac{r^2}{a}$, $\bar{b} = \frac{r^2}{b}$, $\bar{c} = \frac{r^2}{c}$

Înlocuind în (1) și simplificînd cu r^2 obținem:

(4) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$

Din (4) rezultă relațiile:

$a^2 = bc$, $b^2 = ca$, $c^2 = ab$.

Conform problemei anterioare, rezultă că ABC este un triunghi echilateral orintat pozitiv.

154. Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi echilateral, iar M un punct oarecare în planul triunghiului. Considerăm rotațiile $M' = R_{A_1,\frac{2\pi}{3}}(M)$ $M'' = R_{A_2,\frac{2\pi}{3}}(M')$, și $M''' = R_{A_3,\frac{2\pi}{3}}(M'')$

Să se arate că $M''' \equiv M$.

Soluție cu numere complexe.

Fie $A_1(1)$, $A_2(\omega)$, $A_3(\omega^2)$ unde $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Atunci dacă m', m'', m''' sînt afixele punctelor M', M'', M''' avem:

$m' = 1 + \omega(m - 1)$

$m'' = \omega^2 + \omega(m' - \omega^2)$

$m''' = \omega + \omega(m'' - \omega)$

Deci: $m'' = \omega^2 + \omega[1 + \omega(m - 1) - \omega^2] = \omega + \omega^2 m - 1$

$m''' = \omega + \omega(\omega + \omega^2 m - 1 - \omega) = \omega + \omega^3 m - \omega = m$

Deci: $M''' \equiv M$.

155. Fie $A_iB_iC_i$ ($i = 1, 4$) patru triunghiuri echilaterale avînd aceeași orientare. Notăm cu G_a, G_b, G_c centrele de greutate ale patrulaterelor $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$, respectiv $C_1C_2C_3C_4$. Să se arate că triunghiul $G_aG_bG_c$ este echilateral.

C. Cocea

Soluție

Avem: $4g_a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$4g_b = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$

$4g_c = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$

Prin urmare:

$4(g_a + \omega g_b + \omega^2 g_c) = (a_1 + \omega b_1 + \omega^2 c_1) + (a_2 + \omega b_2 + \omega^2 c_2) +$

$+ (a_3 + \omega b_3 + \omega^2 c_3) + (a_4 + \omega b_4 + \omega^2 c_4) = 0,$

deoarece fiecare paranteză din membrul drept este nulă, dat fiind faptul că triunghiurile $A_iB_iC_i$ ($i = 1, 4$) sînt echilaterale.

156. Fie ABC şi A'B'C' două triunghiuri echilaterale de centre G, G' la fel orientate. Să se arate că:

a) Centrele de greutate G_1, G_2, G_3 ale triunghiurilor AB'C', BC'A', CA'B' formează un triunghi echilateral.

b) Dacă G_o este centrul de greutate al triunghiului $G_1G_2G_3$, atunci punctele G, G_o, G' sînt coliniare.

C. Cocea

Soluţie

a) Avem: $3g_1 = a + b' + c'$; $3g_2 = b + c' + a'$; $3g_3 = c + a' + b'$.

Deci: $3(g_1 + \omega g_2 + \omega^2 g_3) = (a + \omega b + \omega^2 c) + (b' + \omega c' + \omega^2 a') + (c' + \omega a' + \omega^2 b') = 0$, deoarece parantezele din membrul drept sînt nule, întrucît triunghiurile ABC şi A'B'C' sînt echilaterale.

b) Putem scrie:

$$g_o = \frac{1}{3}(g_1 + g_2 + g_3) = \frac{1}{9}(a + b + c) + \frac{2}{9}(a' + b' + c') = \frac{1}{3}g + \frac{2}{3}g'$$

Deci $g_o = \lambda g + (1 - \lambda)g'$ *cu* $\lambda = \frac{1}{3}$, prin urmare G, G_o, G' sînt coliniare.

157. Construim în exterior trei triunghiuri echilaterale pe laturile unui triunghi ABC; fie A', B', C' vîrfurile lor. Să se arate că :

a) Triunghiurile ABC şi A'B'C' au acelaşi centru de greutate G.

b) Centrul de greutate al triunghiului format de centrele triunghiurilor echilaterale este G.

Soluţie

a) Fie $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$. Avem:

(1) $b + \omega c + \omega^2 a' = 0$

$c + \omega a + \omega^2 b' = 0$

$a + \omega b + \omega^2 c' = 0$

Din (1) rezultă $(1 + \omega)(a + b + c) = -\omega^2(a' + b' + c')$. Cum $1 + \omega = -\omega^2$, rezultă:

(2) $a + b + c = a' + b' + c'$

b) Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor echilaterale BCA', CAB', ABC'. Avem:

(3) $g_1 = \frac{b+c+a'}{3}$ $g_2 = \frac{c+a+b'}{3}$ $g_3 = \frac{a+b+c'}{3}$

Din (3) prin însumare şi avînd în vedere (2) rezultă:

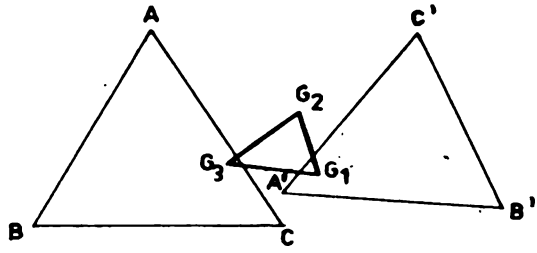
(4) $g_1 + g_2 + g_3 = a + b + c$.

158. Fie ABC şi A'B'C' două triunghiuri echilaterale, la fel orientate. Să se arate că centrele de greutate ale patrulaterelor BCB'C', CAA'C', ABB'A' formează un triunghi echilateral.

C. Cocea

Soluţie

Fie A(a), B(b), C(c), A'(a'), B'(b'), C'(c'), originea fiind un punct O oarecare al planului. Notăm cu G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale patrulaterelor BCC'B',



CAC'A', ABB'A', iar cu g_1, g_2, g_3 afixele lor. Avem:

$$g_1 = \frac{b+c+b'+c'}{4} \quad g_2 = \frac{c+a+c'+a'}{4} \quad g_3 = \frac{a+b+a'+b'}{4}$$

Condiția necesară și suficientă ca $G_1G_2G_3$ să fie echilateral este $g_1 + \omega g_2 + \omega^2 g_3 = 0$ unde ω este rădăcină a unității. Avem:

$$g_1 + \omega g_2 + \omega^2 g_3 = \frac{1}{4}[(b+c+b'+c') + \omega(c+a+c'+a') + \omega^2(a+b+a'+b')] =$$

$$= \frac{1}{4}(b + \omega c + \omega^2 a) + \frac{1}{4}(c + \omega a + \omega^2 b) + \frac{1}{4}(b' + \omega c' + \omega^2 a') +$$

$$\frac{1}{4}(c' + \omega a' + \omega^2 b') = 0$$

deoarece triunghiurile ABC și A'B'C' sînt echilaterale, la fel orientate, și fiecare paranteză rotundă este deci nulă.

159. Fie $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ trei triunghiuri echilaterale, iar G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$. Să se arate că triunghiul $G_1G_2G_3$ este echilateral.

Iacob Hadîrcă

Soluție

Avem: $3g_1 = a_1 + b_1 + c_1$

$3g_2 = a_2 + b_2 + c_2$

$3g_3 = a_3 + b_3 + c_3$

Rezultă: $3(g_1 + \omega g_2 + \omega^2 g_3) = (a_1 + \omega a_2 + \omega^2 a_3) + (b_1 + \omega b_2 + \omega^2 b_3) +$ $+ (c_1 + \omega c_2 + \omega^2 c_3) = 0$, deoarece parantezele sînt nule, întrucît triunghiurile $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ sînt echilaterale. Din $g_1 + \omega g_2 + \omega^2 g_3 = 0$ rezultă că $G_1G_2G_3$ este echilateral.

160. Se consideră triunghiurile echilaterale $A_1A_2A_3$ și $B_1B_2B_3$ la fel orientate. Pe segmentele A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 se construiesc triunghiurile echilaterale $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, la fel orientate cu primele. Demonstrați că $C_1C_2C_3$ este echilateral.

Soluție

Fie. $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}$ Se știe că $\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0$ și $\varepsilon^3 = -1$. Din ipoteză avem:

$a_3 = a_1 + \varepsilon(a_2 - a_1)$
$b_3 = b_1 + \varepsilon(b_2 - b_1)$
$c_1 = a_1 + \varepsilon(b_1 - a_1)$
$c_2 = a_2 + \varepsilon(b_2 - a_2)$
$c_3 = a_3 + \varepsilon(b_3 - a_3)$

Deci $c_3 = a_3 + \varepsilon(b_3 - a_3) = a_1 + \varepsilon(a_2 - a_1) + \varepsilon[b_1 + \varepsilon(b_2 - b_1) - a_1 - \varepsilon(a_2 - a_1)] = a_1 + \varepsilon(b_1 - a_1) + \varepsilon[a_2 + \varepsilon(b_2 - a_2) - a_1 - \varepsilon(b_1 - a_1)] = c_1 + \varepsilon(c_2 - c_1)$ şi conform unei proprietăţi cunoscute (problema 148), rezultă $C_1C_2C_3$ triunghi echilateral.

161. Considerăm în plan două triunghiuri echilaterale ABC şi A'B'C' şi la fel orientate. Cu lungimile AA', BB', CC' putem să formăm un triunghi.

N. Botea – Bul. polit. Buc., 7, 1937

Soluţie

Considerăm transformarea

$z' = pz + q$

care păstrează asemănarea figurilor. Unui triunghi ABC îi va corespunde prin această transformare un triunghi A'B'C' astfel ca:

$a' = pa + q$, $b' = pb + q$, $c' = pc + q$

Condiţia de asemănare:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$ este evident satisfăcută.

Din (1) rezultă

$\sum a'(b - c) = 0$

pe de altă parte

$\sum a(b - c) = 0$

de unde, prin scădere membru cu membru

$\sum (a' - a)(b - c) = 0$

Rezultă:

$|a - a'| \cdot |b - c| \leq |b - b'| \cdot |c - a| + |c - c'| \cdot |a - b|$

Cum $|b - c| = |c - a| = |a - b|$ rezultă

$|a - a'| \leq |b - b'| + |c - c'|$

adică $AA' \leq BB' + CC'$

Evident, putem obţine analog încă două inegalităţi.

Observaţie.

O foarte interesantă generalizare, în spaţiu, pentru două poligoane regulate, poate fi găsită în GMB 3/1985, pag.70–73, aparţinînd conferenţiarului dr. Ioan Pop.

162. Considerăm un triunghi ABC cu centrul de greutate G. Construim triunghiurile echilaterale BB_1B', CC_1C' de acelaşi centru de greutate G, dar de orientări diferite. Atunci triunghiurile AB_1C_1, AB'C' sînt, de asemenea, echilaterale.

E. Abason, Bul. pol. Buc., 7, 1937

Soluţie

(1) $a + b + c = 0$

Prin construcţie B_1, B' sînt obţinute prin rotaţii de unghi $\frac{2\pi}{3}$, deci au acelaşi modul, iar argumentele diferă prin $\pm \frac{2\pi}{3}$. Aşadar,

(2) $b_1 = b\cdot e^{\frac{4i\pi}{3}}$, $b' = b\cdot e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

Notăm

(3) $\omega = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $\omega^3 = 1$

Atunci

(4) $b_1 = b\omega$, $b' = b\omega^2$, $c_1 = c\omega^2$, $c' = c\omega$

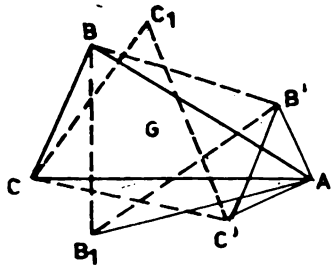
Din (1) rezultă:

(5) $a + b + c = a + b_1\omega^2 + c_1\omega = 0$

$a + b + c = a + b'\omega^2 + c'\omega^2 = 0$

Din (5) rezultă AB_1C_1 şi AB'C' triunghiuri echilaterale deoarece dacă $z_1, z_2, z_3 \in C$ condiţia

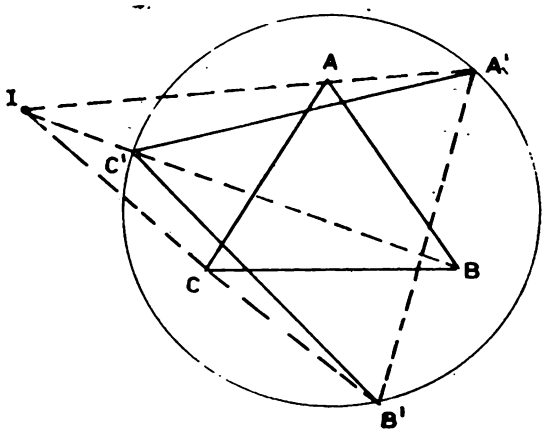
$z_1 + z_2\omega + z_3\omega^2 = 0$ este suficientă pentru ca triunghiul de afixe z_1, z_2, z_3 să fie echilateral.



162. Fie ABC şi A'B'C' două triunghiuri echilaterale de acelaşi centru, cu vîrfurile notate în acelaşi sens de rotaţie. Triunghiurile ABC şi A'B'C' sînt de trei ori omologice şi anume în ordinea:

$$\begin{pmatrix} ABC \\ A'C'B' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ABC \\ C'B'A' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ABC \\ B'A'C' \end{pmatrix}$$

TEOREMA LUI BARBILIAN



Soluţie

Problema revine la a arăta, de exemplu, că dreptele AA', B'C, BC' sînt concurente. Luăm originea în O; atunci:

(1) A(a), B(ωa), C(ω^2a)

(2) A'(a'), B'(ωa'), C'(ω^2a')

Ecuaţiile dreptelor sînt:

(3) (AA') $(a - a')\bar{z} + (\bar{a}' - \bar{a})z + a'\bar{a} - a\bar{a}' = 0$

(BC') $(\omega a - \omega^2 a')\bar{z} + (\omega\bar{a}' - \omega^2\bar{a})z + \omega a'\bar{a} - \omega^2 a\bar{a}' = 0$

$(B'C)$ $(\omega^2 a - \omega a')\bar{z} + (\omega^2\bar{a}' - \omega\bar{a})z + \omega^2 a'\bar{a} - \omega a\bar{a}' = 0.$

Adunînd membru cu membru relaţiile (3) şi ţinînd seama că $1 + \omega + \omega^2 = 0$ primul membru devine 0, ceea ce arată concurenţa dreptelor.

164. Se dau în acelaşi plan două triunghiuri echilaterale $A_1A_2A_3$ şi $A'_1A'_2A'_3$ la fel orientate, situate în poziţii oarecare unul faţă de celălalt. Să se arate că :

a) Triunghiul $A^\circ_1A^\circ_2A^\circ_3$ format de mijloacele segmentelor $(A_1A'_1)$, $(A_2A'_2)$, $(A_3A'_3)$, este de asemenea echilateral.

b) Dacă G şi G' sînt centrele triunghiurile $A_1A_2A_3$ şi $A'_1A'_2A'_3$, centrul triunghiului $A^\circ_1A^\circ_2A^\circ_3$ este mijlocul segmentului GG'.

Gh. D. Simionescu

Soluţie

Condiţiile ca triunghiurile $A_1A_2A_3$ şi $A'_1A'_2A'_3$ să fie echilaterale sînt:

(1) $a_1\omega^2 + a_2\omega + a_3 = 0$

(2) $a'_1\omega^2 + a'_2\omega + a'_3 = 0$

unde $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ şi $\omega^3 = 1$. Afixele mijloacelor A°_1, A°_2, A°_3 sînt

(3) $a_1^\circ = \frac{1}{2}(a_1 + a'_1)$; $a_2^\circ = \frac{1}{2}(a_2 + a'_2)$; $a_3^\circ = \frac{1}{2}(a_3 + a'_3)$

Avînd în vedere (1) şi (2) rezultă $a^\circ_1\omega^2 + a^\circ_2\omega + a^\circ_3 = 0$,

ceea ce arată că $A_1^0A_2^0A_3^0$ este echilateral.

Dacă g şi g' sînt afixele centrelor de greutate ale triunghiurilor $A_1A_2A_3$ şi $A'_1A'_2A'_3$ avem:

$$g = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3), \quad g' = \frac{1}{3}(a'_1 + a'_2 + a'_3)$$

şi dacă g° este afixul centrului de greutate $G_\circ$ al $\Delta A^\circ_1A^\circ_2A^\circ_3$ din (3) rezultă:

$$g^\circ = \frac{1}{3}(a_1^\circ + a_2^\circ + a_3^\circ) = \frac{1}{6}(a_1 + a'_1 + a_2 + a'_2 + a_3 + a'_3) = \frac{1}{6}(3g + 3g') = \frac{1}{2}(g + g')$$

Deci $G_\circ$ este mijlocul segmentului (GG'). Propunem cititorului să caute o soluţie vectorială a problemei.

165. Fie ACV, BAW, CBU triunghiuri echilaterale construite spre exteriorul triunghiului oarecare ABC. Să se arate că centrele de greutate ale triunghiurilor VWA, WBU, UCV, CAV, BAW, CBU sînt vîrfurile unui hexagon regulat cu centrul în centrul de greutate al triunghiului ABC.

I. Hadîrcă

Soluție

Fie a, b, c afixele vîrfurilor A, B, C iar u, v, w afixele vîrfurilor U, V, W. Din ipoteză rezultă:

(1) $a\omega + c\omega^2 + v = 0$
$b\omega + a\omega^2 + w = 0$
$c\omega + b\omega^2 + u = 0$

Avînd în vedere că $1 + \omega + \omega^2 = 0$ și adunînd relațiile (1) găsim $a + b + c = u + v + w$, deci ABC și UVW au același centru de greutate de afix $g = \frac{1}{3}(a+b+c)$.

Afixele centrelor de greutate G_u, G_v, G_w, G_a, G_b, G_c ale triunghiurilor VWA, WBU, UCV, CBU, CAV, BAW sînt:

$$g_u = \frac{1}{3}(v + w + a) \qquad g_a = \frac{1}{3}(b + c + u)$$

$$g_v = \frac{1}{3}(w + b + u) \qquad g_b = \frac{1}{3}(c + a + v)$$

$$g_w = \frac{1}{3}(u + v + c) \qquad g_c = \frac{1}{3}(a + b + w)$$

Hexagonul $G_aG_wG_bG_uG_cG_v$ este regulat. Vom arăta că triunghiurile cu vîrfurile în G și avînd baze laturile hexagonului sînt echilaterale. De exemplu, triunghiul G_uGG_b este echilateral. Într-adevăr, ținînd seama de afixele vîrfurilor găsim:

$$\omega g_u + \omega^2 g + g_b = \frac{1}{3}[\omega(v+w+a) + \omega^2(a+b+c) + c + a + v] =$$

$$= \frac{1}{3}[(a\omega + c\omega + v) + (b\omega^2 + w\omega + a) + (a\omega^2 + v\omega + c)$$

Numerele din primele două paranteze sînt egale cu zero, deoarece prin ipoteză ACV și BAW sînt echilaterale, iar a treia paranteză este de asemenea zero încît:

$$a\omega^2 + v\omega + c = \frac{1}{\omega^2}(a\omega^4 + v\omega^3 + c\omega^2) = \frac{1}{\omega^2}(a\omega + c\omega^2 + v) = 0$$

Rezultă G_uGG_b echilateral. Analog pentru celelalte triunghiuri.

166. Pe laturile patrulaterului ABCD se construiesc în interior triunghiurile echilaterale ABM, BCN, CDP, DAQ. Să se demonstreze că patrulaterele ABCD și MNPQ au același centru de greutate.

Marius Burtea

Soluție

Deoarece triunghiurile ABM, BCN, CDP și DAQ sînt echilaterale avem:

(1) $\omega a + \omega^2 b + m = 0$
$\omega b + \omega^2 c + n = 0$
$\omega c + \omega^2 d + p = 0$
$\omega d + \omega^2 a + q = 0$

unde a, b, c, d, m, n, p, q sînt afixele punctelor A, B, C, D, M, N, P, Q respectiv. Adunînd relațiile (1) găsim: $(\omega + \omega^2)(a + b + c + d) + m + n + p + q = 0$. Cum $\omega + \omega^2 = -1$, rezultă $a + b + c + d = m + n + p + q$. Deci patrulaterele ABCD și MNPQ au același centru de greutate.

Observație.

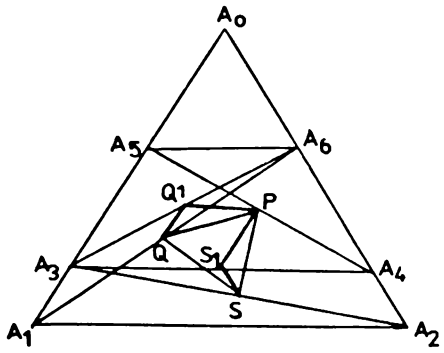
Problema se poate extinde pentru un poligon oarecare demonstrația făcîndu-se asemănător.

167. În triunghiul echilateral $A_0A_1A_2$ fie punctele A_3, A_5 pe (A_0A_1), A_4, A_6 pe (A_0A_2) astfel încît
$A_3 \in (A_1A_5)$, $A_4 \in (A_2A_6)$ şi $A_3A_4 \parallel A_5A_6 \parallel A_1A_2$. Să se arate că mijloacele segmentelor (A_2A_3), (A_4A_5), (A_6A_1) sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

Iacob Hadîrcă

Soluţia 1.

Fie S, P, Q mijloacele segmentelor (A_2A_3), (A_4A_5), (A_1A_6) iar Q_1 şi S_1 mijloacele segmentelor (A_3A_6) şi (A_3A_4). Folosind formula ce dă lungimea segmentului ce uneşte mijloacele diagonalelor unui trapez avem:



$$PQ_1 = \frac{A_3A_4 - A_5A_6}{2} = \frac{A_4A_6}{2} = \frac{A_5A_3}{2}$$

Dar $\sphericalangle QQ_1P = 120°$. Pe de altă parte

$$PS_1 = \frac{A_3A_5}{2} \text{ şi}$$

$$SS_1 = \frac{A_4A_2}{2} = \frac{A_3A_1}{2} = QQ_1$$

iar $\sphericalangle SS_1P = 120°$. Deci $\Delta PQ_1Q \equiv \Delta PS_1S$ de unde $PQ = PS$. Dar $\sphericalangle SPQ = \sphericalangle S_1PQ_1 = 60°$, deci SPQ este echilateral.

Soluţia a 2–a.

Fie $A_0(0)$, $A_1(a)$, $A_3(\mu)$, $A_5(\lambda)$, iar $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$. Conform problemei 148, avem: $A_2(\varepsilon a)$, $A_4(\varepsilon\mu)$, $A_6(\varepsilon\lambda)$. Avem:

(1) $2s = \varepsilon a + \mu$
(2) $2p = \varepsilon\mu + \lambda$
(3) $2q = a + \varepsilon\lambda$

Trebuie dovedit că $2p - 2q = \varepsilon(2s - 2q)$, sau că: $\lambda + \varepsilon\mu - a - \varepsilon\lambda = \varepsilon(\varepsilon a + \mu - a - \varepsilon\lambda)$ sau: $\lambda + \varepsilon\mu - a - \varepsilon\lambda = \varepsilon^2 a + \varepsilon\mu - \varepsilon a - \varepsilon^2\lambda$ sau: $\lambda(1 - \varepsilon + \varepsilon^2) - a(1 - \varepsilon + \varepsilon^2) = 0$, egalitate evidentă deoarece $1 - \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$. Din $p - s = \varepsilon(s - q)$ conform problemei amintite rezultă că PSQ este echilateral.

168. Se consideră triunghiurile echilaterale $A_1B_1C_1$, $A_2A_2C_2$, $A_3B_3C_3$ la fel orientate astfel încît triunghiul $A_1A_2A_3$ să fie şi el echilateral şi cu aceeaşi orientare. Demonstraţi că mijloacele segmentelor C_1B_2, C_2B_3, C_3B_1 sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

Soluţie

Conform problemei 148, avem:

$c_1 = a_1 + \varepsilon(b_1 - a_1)$
$c_2 = a_2 + \varepsilon(b_2 - a_2)$
$c_3 = a_3 + \varepsilon(b_3 - a_3)$
$a_3 = a_1 + \varepsilon(a_2 - a_1)$

unde $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$. Avem:

$c_1 + b_2 + \varepsilon(c_2 + b_3 - c_1 - b_2) =$
$= a_1 + \varepsilon(b_1 - a_1) + b_2 + \varepsilon[a_2 + \varepsilon(b_2 - a_2) + b_3 - a_1 - \varepsilon(b_1 - a_1) - b_2] =$
$= (1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2)a_1 + (\varepsilon - \varepsilon^2)b_1 + (\varepsilon^2 - \varepsilon + 1)b_2 + \varepsilon b_3 + (\varepsilon - \varepsilon^2)a_2 =$
$= -\varepsilon a_1 + b_1 + a_2 + \varepsilon b_3$

Pe de altă parte:

$c_3 + b_1 = a_3 + \varepsilon(b_3 - a_3) + b_1 = a_1 + \varepsilon(a_2 - a_1) + \varepsilon b_3 - \varepsilon a_1 - \varepsilon^2(a_2 - a_1) + b_1 =$
$= (a_1 - \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_1) + a_2(\varepsilon - \varepsilon^2) + \varepsilon b_3 + b_1 = -\varepsilon a_1 + a_2 + \varepsilon b_3 + b_1$

Prin urmare:

$$\frac{1}{2}(c_3 + b_1) = \frac{1}{2}[(c_1 + b_2) + \varepsilon(c_2 + b_3 - c_1 - b_2)]$$

deci triunghiul format de mijloacele segmentelor C_1B_2, C_2B_3, C_3B_1 este echilateral.

169. Fie $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ un hexagon înscris în cercul $\mathcal{C}(O;R)$ încît $A_1A_2 = A_3A_4 = A_5A_6 = R$. Să se arate că mijloacele segmentelor (A_2A_3), (A_4A_5), (A_6A_1) formează un triunghi echilateral.

Concurs SUA

Soluţie

Fie M_1, M_2, M_3 mijloacele segmentelor (A_2A_3), (A_4A_6), (A_6A_1) iar $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Alegem originea sistemului de coordonate în O. Deoarece triunghiurile OA_1A_2, OA_3A_4 şi OA_5A_6 sînt echilaterale avem:

$a_2 + \omega a_1 = 0$
$a_4 + \omega a_3 = 0$
$a_6 + \omega a_5 = 0$

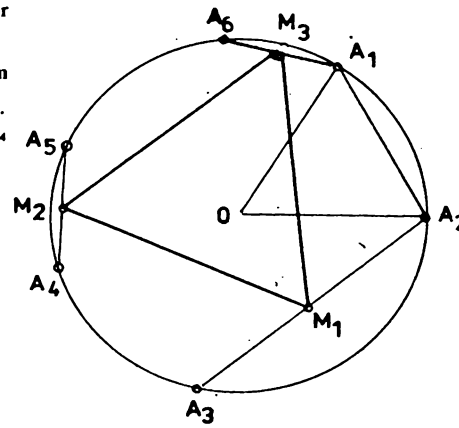
Putem scrie:

$$m_1 + \omega^2 m_2 + \omega m_3 = \frac{1}{2}\cdot$$

$$\cdot[a_2 + a_3 + \omega^2(a_4 + a_5) + \omega(a_6 + a_1)] = \frac{1}{2}\cdot$$

$$\cdot[(a_2 + \omega a_1) + \omega^2(a_4 + \omega a_3) + \omega(a_6 + \omega a_5)] =$$
$= 0$

deci $M_1M_2M_3$ este echilateral.



Notă. Pentru o soluţie sintetică a problemei, cititorul poate consulta articolul "Generalizări şi aplicaţii ale unor rezultate clasice de geometria triunghiului" din GMB 2/1989, pag. 56–62, autor Radu State.

170. Fie OAB, OCD, OEF triunghiuri echilaterale coplanare. Să se arate că mijloacele segmentelor (BC), (DE), (FA) sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

L. Petre, 18075, GMB nr.1/1980

Soluţie

Alegem originea în O. Fie ω rădăcina de ordinul 3 a unităţii. Considerăm triunghiurile orientate pozitiv.

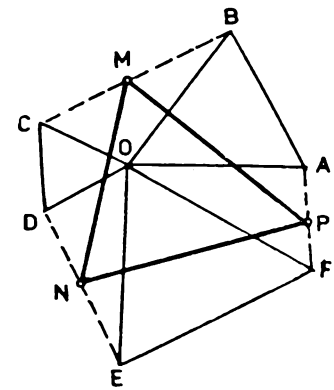
Avem

$$\begin{aligned} &b + \omega^2 a = 0 \\ (1)\quad &c + \omega d = 0 \\ &\omega e + \omega^2 f = 0 \end{aligned}$$

unde a, b, c, d, e, f sînt afixele punctelor A, B, C, D, E respectiv F. Notăm M, N, P mijloacele segmentelor (BC), (DE), (FA). Avem:

$$m = \frac{b+c}{2} \qquad n = \frac{d+e}{2} \qquad p = \frac{f+a}{2}$$

Dar:



$$m + \omega n + \omega^2 p = \frac{1}{2}(b + c + \omega d + \omega e + \omega^2 f + \omega^2 a) =$$

$$= \frac{1}{2}[(b + \omega^2 a) + (c + \omega d) + (\omega e + \omega^2 f)] = 0$$

deoarece conform (1) fiecare paranteză rotundă este nulă.

Observaţie.

Cînd triunghiurile echilaterale sînt egale se obţine problema 169.

171. Să se arate că două triunghiuri echilaterale sînt triortologice şi trimetaparalele.

Soluţie

Vom demonstra un enunţ mai general: "Două triunghiuri invers asemenea sînt ortologice şi metaparalele".

a) Fie O un punct oarecare originea planului. Dacă a,b,c, respectiv a',b',c' sînt afixele vîrfurilor ale două triunghiuri invers asemenea, atunci:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \bar{a}' & \bar{b}' & \bar{c}' \end{vmatrix} = 0 .$$

sau

$$(2)\ \sum a(\bar{b}' - \bar{c}') = 0$$

şi prin conjugarea relaţiei (2) obţinem:

$$(3)\ \sum \bar{a}(b' - c') = 0$$

Coeficientul complex al dreptei B'C' este:

$$(4)\ \chi_{B'C'} = \frac{b'-c'}{\bar{b}'-\bar{c}'}$$

Urmează că ecuaţia perpendicularei din A pe B'C' este:

(5) $z-a = -\dfrac{b'-c'}{\bar{b}'-\bar{c}'}(\bar{z}-\bar{a})$

sau:

(6) $z(\bar{b}'-\bar{c}')+\bar{z}(b'-c')-a(\bar{b}'-\bar{c}')-\bar{a}(b'-c') = 0$

Analog obţinem ecuaţiile perpendicularelor din B şi C pe C'A' respectiv A'B', date de (7) şi (8):

(7) $z(\bar{c}'-\bar{a}')+\bar{z}(c'-a')-b(\bar{c}'-\bar{a}')-\bar{b}(c'-a') = 0$

(8) $z(\bar{a}'-\bar{b}')+\bar{z}(a'-b')-c(\bar{a}'-\bar{b}')-\bar{c}(a'-b') = 0$

Avînd în vedere (2) şi (3) observăm că suma membrilor întîi ai ecuaţiilor (6), (7) şi (8) este 0 ceea ce probează faptul că perpendicularele din A,B,C pe B'C',C'A',A'B' sînt concurente.

Consecinţă.

Două triunghiuri echilaterale ABC şi A'B'C' sînt triortologice.

Demonstraţie.

Cele două triunghiuri sînt în trei moduri invers asemenea:

$$\begin{pmatrix} ABC \\ A'C'B' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ABC \\ C'B'A' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ABC \\ B'A'C' \end{pmatrix}$$

b) Să notăm cu m, n, p paralele duse prin A, B, C la laturile B'C', C'A', A'B'. Deoarece m//B'C', $\chi_m = \chi_{B'C'}$, deci:

$$\chi_m = \frac{b'-c'}{\bar{b}'-\bar{c}'}$$

Ecuaţia dreptei m va fi:

(9) $z(\bar{b}'-\bar{c}')-\bar{z}(b'-c')-a(\bar{b}'-\bar{c}')+\bar{a}(b'-c') = 0$

Adunînd membru cu membru, relaţia (9) cu încă două analoage, rezultă concurenţa dreptelor m, n, p.

Consecinţă.

Două triunghiuri echilaterale sînt trimetaparalele.

Demonstraţie.

Două triunghiuri echilaterale sînt în trei moduri invers asemenea.

172. Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc triunghiurile echilaterale BCA', ACB' spre exterior şi ABC' spre interior. Fie M centrul triunghiului ABC'. Demonstraţi că triunghiul MA'B' este isoscel şi că $A'MB' = \sphericalangle 120°$.

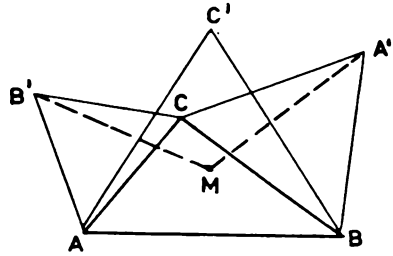
Soluţie

Fie $\varepsilon = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Avem: $a'-b = \bar{\varepsilon}(c-b) \Rightarrow a' = \bar{\varepsilon}c + b(1-\bar{\varepsilon})$ sau avînd în vedere că $1 - \bar{\varepsilon} = -\bar{\varepsilon}^2 = \varepsilon$ rezultă:

(1) $$a' = b\varepsilon + \bar{\varepsilon}c$$

Analog (2) $b' = \varepsilon c + \bar{\varepsilon} a$

(3) $c' = \bar{\varepsilon} a + \varepsilon b$



Rezultă

$3m = a+b+c' = a+b+\bar{\varepsilon}a+\varepsilon b =$
$= (1+\bar{\varepsilon})a+(1+\varepsilon)b$

(4)

$3(m-a')=(1+\bar{\varepsilon})a+(1+\varepsilon)b-3\varepsilon b-3\bar{\varepsilon}c =$
$= (1+\bar{\varepsilon})a+(1-2\varepsilon)b-3\bar{\varepsilon}c$. Dar

(5)

$3(m-b')=(1+\bar{\varepsilon})a+(1+\varepsilon)b-3\varepsilon c-3\bar{\varepsilon}a=$
$= (1-2\bar{\varepsilon})a+(1+\varepsilon)b-3\varepsilon c$

Vom demonstra că

(6) $3(m-a')\varepsilon^2 = 3(m-b')$

Dar $\varepsilon^2 = -\frac{1}{\varepsilon} = -\bar{\varepsilon}$. Avem:

(7) $-\bar{\varepsilon}(1+\bar{\varepsilon}) = -\bar{\varepsilon}-\bar{\varepsilon}^2 = 1-2\bar{\varepsilon}$

(8) $-\bar{\varepsilon}(1-2\varepsilon) = -\bar{\varepsilon}+2 = 1+(1-\bar{\varepsilon}) = 1+\varepsilon$

(9) $-\bar{\varepsilon}(-3\bar{\varepsilon}) = 3\bar{\varepsilon}^2 = -3\varepsilon$

Din (7), (8), (9) rezultă că: $3(m-a')\varepsilon^2 = 3(m-b')$ sau

(10) $(m-a')\varepsilon^2 = m-b'$

Din (10) rezultă că A'MB'este isoscel şi că $\sphericalangle A'MB' = 120°$.

173. Să se arate că ortopolurile diagonalelor unui hexagon regulat înscris în cercul $\mathcal{C}(O;R)$ în raport cu orice triunghi înscris în $\mathcal{C}$, formează un triunghi echilateral.

C. Cocea

Soluţie

Putem considera R = 1. Fie MNP un triunghi oarecare înscris în $\mathcal{C}$ iar ABC un triunghi echilateral înscris în $\mathcal{C}$. Notăm cu A', B', C' punctele diametral opuse lui A, B, C de pe cercul $\mathcal{C}$. Putem considera că a = 1, b = ω, c = ω^2 şi atunci a' = − 1, b' = − ω, c' = − ω^2. Figura AC'BA'CB' este hexagon regulat. Conform rezultatului de la pag. 85 din lucrarea [17], ortopolul unei drepte ce trece printr−un punct avînd afixul z_0 şi panta χ în raport cu un triunghi MNP este:

(1) $\omega = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_3}{\chi} + z_0 - \chi\bar{z}_0\right)$ unde $\sigma_1 = m+n+p$, $\sigma_3 = mnp$. Să notăm cu O_1, O_2, O_3 ortopolurile dreptelor AA', BB', CC' în raport cu triunghiul MNP. Avem:

$$\chi_{AA'} = \frac{1+1}{\bar{1}+\bar{1}} = 1 \quad \chi_{BB'} = \frac{\omega+\omega}{\bar{\omega}+\bar{\omega}} = \omega^2 \quad \chi_{CC'} = \frac{\omega^2+\omega^2}{\bar{\omega}^2+\bar{\omega}^2} = \omega$$

Atunci:

(2) $a - \chi_{AA'}\bar{a} = 1-1 = 0$

(3) $b-\chi_{BB'}\bar{b} = \omega-\omega^2\bar{\omega} = \omega-\omega = 0$

(4) $c-\chi_{CC'}\bar{c} = \omega^2-\omega\cdot\bar{\omega}^2 = \omega^2-\omega^2 = 0$

Rezultă că:

(5) $o_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$

(6) $o_2 = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_3}{\omega^2}\right) = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3\omega)$

(7) $o_3 = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_3}{\omega}\right) = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3\omega^2)$

Atunci:

$$o_1+\omega o_2+\omega^2 o_3 = \frac{1}{2}\sigma_1(1+\omega+\omega^2)-\frac{1}{2}\sigma_3(1+\omega^2+\omega) = 0$$

deci triunghiul $O_1O_2O_3$ este echilateral.

174. Pe diagonalele unui paralelogram se construiesc triunghiurile echilaterale ACM şi BDN.Să se arate că MN este perpendiculară pe două laturi opuse ale paralelogramului.

Soluţie

Fie O punctul de intersecţie al diagonalelor originea iar A(a), B(b) urmează C(−a), D(−b). Deoarece ACM este echilateral rezultă: $m + \omega a + \omega^2 c = 0$

sau $m + \omega a - \omega^2 a = 0$ de unde:

(1) $m = -\omega a + \omega^2 a$

Analog obţinem

(2) $n = -\omega b + \omega^2 b$

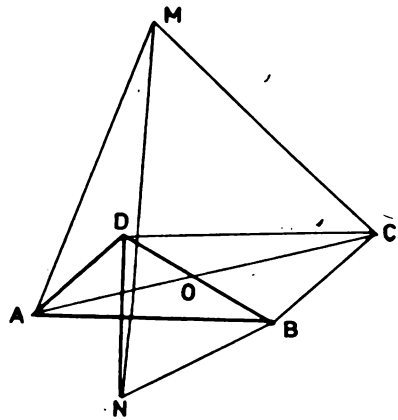
Avem:

$$\chi_{MN} = \frac{m-n}{\bar{m}-\bar{n}} = \frac{-\omega(a-b)+\omega^2(a-b)}{-\bar{\omega}(\bar{a}-\bar{b})+\bar{\omega}^2(\bar{a}-\bar{b})}$$

$$= \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}}\cdot\frac{-\omega+\omega^2}{-\bar{\omega}+\bar{\omega}^2} =$$

$$= \frac{a-b}{a-b}\cdot\frac{-\omega+\omega^2}{-\omega^2+\omega} = -\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = -\chi_{AB}$$

Deoarece $\chi_{MN} = -\chi_{AB}$ rezultă $MN \perp AB$.



175. Se consideră triunghiul $A_1A_2A_3$ şi P_0 în planul său. Pentru orice $s \in N$, $s \geq 0$, considerăm $A_s = A_{s-3}$ şi construim şirul de puncte $P_0, P_1, P_2, \ldots$, unde P_{k+1} se

obține printr-o rotație de 120° în jurul lui A_{k+1}. Demonstrați că dacă $P_{1986} = P_0$, atunci triunghiul $A_1A_2A_3$ este echilateral

OIM 1986

Soluție

Fie p_k și a_k afixele punctelor P_k și A_k iar $\gamma = \cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3})$. Din ipoteză

$p_k = a_k + \gamma(p_{k-1} - a_k)$, $k = \overline{1,1986}$. Deci:

$p_1 = a_1 + \gamma(p_0 - a_1)$

$p_2 = a_2 + \gamma(p_1 - a_2) = a_2 + \gamma(a_1 - a_2) + \gamma^2(p_0 - a_1)$

$p_3 = a_3 + \gamma(p_2 - a_3) = a_3 + \gamma(a_2 - a_3) + \gamma^2(a_1 - a_2) + \gamma^3(p_0 - a_1) =$

$= p_0 + (a_3 - a_1) + \gamma(a_2 - a_3) + \gamma^2(a_1 - a_2)$ $\quad (\gamma^3 = 1)$

Analog se arată că;

$p_6 = p_3 + (a_3 - a_1) + \gamma(a_2 - a_3) + \gamma^2(a_1 - a_2)$

În general:

$p_{3k} = p_{3(k-1)} + (a_3 - a_1) + \gamma(a_2 - a_3) + \gamma^2(a_1 - a_2)$

Deci:

$p_{1986} = p_0 + 662[(a_3 - a_1) + \gamma(a_2 - a_3) + \gamma^2(a_1 - a_2)]$

$p_{1986} = p_0 \Leftrightarrow (a_3 - a_1) + \gamma(a_2 - a_3) + \gamma^2(a_1 - a_2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1(\gamma^2 - 1) + a_2(\gamma - \gamma^2) + a_3(1 - \gamma) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \gamma)(a_1\gamma^2 + a_2\gamma + a_3) = 0 \Leftrightarrow a_1\gamma^2 + a_2\gamma + a_3 = 0$

Cum $\gamma = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \omega^2$ conform problemei 149, rezultă că triunghiul $A_1A_2A_3$ este echilateral.

176. În planul triunghiului $A_1A_2A_3$ se consideră punctele B_1, B_2, B_3 astfel încît triunghiurile $A_1A_2B_3$, $A_2A_3B_1$, $A_3A_1B_2$ să fie asemenea și la fel orientate. Dacă triunghiul $A_1A_2A_3$ nu este echilateral, atunci triunghiul $B_1B_2B_3$ este echilateral dacă și numai dacă triunghiurile $A_1A_2B_3$, $A_2A_3B_1$, $A_3A_1B_2$ sînt isoscele cu bazele laturilor triunghiului $A_1A_2A_3$ și unghiurile de la bază de măsură 30°.

Soluție

Fie $z = \frac{b_3 - a_1}{a_2 - a_1} = \frac{b_1 - a_2}{a_3 - a_2} = \frac{b_2 - a_3}{a_1 - a_3}$. Rezultă:

$b_3 = a_1 + z(a_2 - a_1)$

$b_1 = a_2 + z(a_3 - a_2)$

$b_2 = a_3 + z(a_1 - a_3)$

Dacă triunghiul $B_1B_2B_3$ este echilateral, atunci:

$b_1 + \omega b_2 + \omega^2 b_3 = 0$, adică:

$a_2 + z(a_3 - a_2) + \omega[a_3 + z(a_1 - a_3)] + \omega^2[a_1 + z(a_2 - a_1)] = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a_2 + \omega a_3 + \omega^2 a_1) + z[(a_3 + \omega a_1 + \omega^2 a_2) - (a_2 + \omega a_3 + \omega^2 a_1)] = 0$

$\Leftrightarrow a_2 + \omega a_3 + \omega^2 a_1 + z[a_3(1 - \omega) + a_1\omega(1 - \omega) + a_2(\omega^2 - 1)] = 0$

$\Leftrightarrow a_2 + \omega a_3 + \omega^2 a_1 + z(1 - \omega)[a_3 + a_1\omega - (1 + \omega)a_2)] = 0$

$\Leftrightarrow a_2 + \omega a_3 + \omega^2 a_1 + z(1 - \omega)[a_3 + a_1\omega + a_2\omega^2] = 0$

Deoarece triunghiul $A_1A_2A_3$ nu este echilateral, $a_3 + a_1\omega + a_2\omega^2 \neq 0$, deci:

$$z = -\frac{a_2+\omega a_3+\omega^2 a_1}{(1-\omega)(a_3+a_1\omega+a_2\omega^2)} = -\frac{\omega(a_2+\omega a_3+\omega^2 a_1)}{(1-\omega)(\omega a_3+\omega^2 a_1+a_2)} =$$

$$= \frac{-\omega}{1-\omega} = -\frac{1}{\sqrt{3}}[\cos(-30^\circ) + i\sin(-30^\circ)]$$

de unde rezultă uşor că triunghiurile $A_1A_2B_3$, $A_2A_3B_1$, $A_3A_1B_2$ sînt isoscele cu unghiurile de la bază de 30°. Reciproca este cunoscută.

177. Fie ABC şi A'B'C' două triunghiuri echilateral invers orientate de acelaşi centru O. Notăm cu O_1, O_2, O_3 simetricele lui O faţă de mijloacele segmentelor (AA'), (BB'), (CC'). Să se arate că :

a) Dreptele AO_1, BO_2, CO_3 sînt concurente.

b) Dreptele $A'O_1$, $B'O_2$, $C'O_3$ sînt concurente.

C. Cocea

Soluţie

a) Dacă P(p) şi Q(q) sînt două puncte distincte, ecuaţia dreptei PQ este dată de:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ p & \bar{p} & 1 \\ q & \bar{q} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$(2)\quad z(\bar{p}-\bar{q}) - \bar{z}(p-q) + p\bar{q} - \bar{p}q = 0$$

Deoarece ABC şi A'B'C' sînt invers orientate de acelaşi centru O (pe care îl considerăm ca origine), există $p \in C$ încît $a' = p\bar{a}$, $b' = p\bar{b}$, $c' = p\bar{c}$ (a, b, c fiind afixele vîrfurilor triunghiului ABC). Putem considera $a = 1$, $b = \omega$, $c = \omega^2$. Fie M_1 mijlocul lui AA'. Avem:

$m_1 = \frac{a+p\bar{a}}{2}$. *Cum* $\frac{o+o_1}{2} = m_1$ rezultă:

$$(3)\quad o_1 = a + p\bar{a}$$

Analog

$$(4)\quad o_2 = b + p\bar{b}$$

$$(5)\quad o_3 = c + p\bar{c}$$

Avînd în vedere (2) ecuaţia dreptei AO_1 se scrie:

$$(6)\quad z(-\bar{p}a) - \bar{z}(-p\bar{a}) + a(\bar{a} + p\bar{a}) - \bar{a}(a + p\bar{a}) = 0$$

sau

$$(7)\quad z(-\bar{p}a) + \bar{z}(p\bar{a}) + \bar{p}a^2 - p\bar{a}^2 = 0$$

Ecuaţiile lui BO_2 şi CO_2 se obţin analog şi sînt date de (8) şi (9):

$$(8)\quad z(-\bar{p}b) + \bar{z}(p\bar{b}) + \bar{p}b^2 - p\bar{c}^2 = 0$$

$$(9)\quad z(-\bar{p}c) + \bar{z}(p\bar{c}) + \bar{p}c^2 - p\bar{c}^2 = 0$$

Observăm că suma membrilor întîi ale ecuaţiilor (7), (8), (9) este zero (în virtutea relaţiilor $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2 = 0$), ceea ce arată că dreptele AO_1, BO_2, CO_3 sînt concurente.

b) Datorită simetriei $A'O_1$, $B'O_2$, $C'O_3$ sînt concurente.

178. Fie $A_oB_oC_o$, $A_oA_1A_2$, $B_oB_1B_2$, $C_oC_1C_2$ patru triunghiuri echilaterale cu aceeaşi orientare. Să se arate că :

a) Mijloacele segmentelor A_2B_1, B_2C_1, C_2A_1 sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

b) Centrele de greutate ale triunghiurilor $A_oB_oC_o$, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ formează un triunghi echilateral.

c) Centrele de greutate ale patrulaterelor $B_oC_oC_1B_2$, $A_oC_oC_2A_1$ şi $A_oB_oB_1A_2$ formează un triunghi echilateral.

C. Cocea

Soluţie

a) Putem considera originea în centrul triunghiului $A_oB_oC_o$ iar triunghiurile orientate pozitiv. Avem:

$$(1)\quad \begin{cases} a_o + \omega a_1 + \omega^2 a_2 = 0 \\ b_o + \omega b_1 + \omega^2 b_2 = 0 \\ c_o + \omega c_1 + \omega^2 c_2 = 0 \end{cases}$$

Din (1) rezultă:

$$(2)\quad \begin{cases} a_2 = -\omega a_o - \omega^2 a_1 \\ b_2 = -\omega b_o - \omega^2 b_1 \\ c_2 = -\omega c_o - \omega^2 c_1 \end{cases}$$

Fie M, N, P mijloacele segmentelor A_2B_1, B_2C_1, C_2A_1. În conformitate cu (2) avem:

$$(3)\quad \begin{cases} 2m = b_1 - \omega a_0 - \omega^2 a_1 \\ 2n = c_1 - \omega b_0 - \omega^2 b_1 \\ 2p = a_1 - \omega c_0 - \omega^2 c_1 \end{cases}$$

Din (3) rezultă că:

$$(4)\quad 2(m + \omega n + \omega^2 p) = (b_1 - b_1) + \omega(c_1 - c_1) + \omega^2(a_1 - a_1) - \\ - \omega(a_o + \omega b_o + \omega^2 c_o) = 0$$

Deci triunghiul MNP este echilateral.

b) Fie B_o, B_1, B_2 centrele de greutate ale triunghiurilor $A_oB_oC_o$, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$. Avem:

$$3(g_o + \omega g_1 + \omega^2 g_2) = (a_o + \omega a_1 + \omega^2 a_2) + (b_o + \omega b_1 + \omega^2 b_2) + \\ + (c_o + \omega c_1 + \omega^2 c_2) = 0$$

în virtutea relaţiilor (1).

c) Fie M_1, N_1, P_1 mijloacele segmentelor A_oB_o, B_oC_o, C_oA_o. Avem:

$$m_1 = \frac{a_o + b_o}{2} = -\frac{c_o}{2} \text{ deoarece } a_o + b_o + c_o = 0.$$

Analog, $n_1 = -\dfrac{a_o}{2}$ şi $p_1 = -\dfrac{b_o}{2}$.

Fie G'_1, G'_2, G'_3 centrele de greutate ale patrulaterelor $A_2B_1A_oB_o$, $B_2C_1C_oB_o$ respectiv $C_2A_1A_oC_o$. Deoarece G'_1 este mijlocul segmentului MM_1 avem:

$$g'_1 = \frac{m + m_1}{2} = \frac{m}{2} - \frac{c_o}{4}$$

Analog $g_2' = \frac{n}{2} - \frac{a_o}{4}$ $\qquad g_3' = \frac{p}{2} - \frac{b_o}{4}$

Atunci:

(5) $g_1' + \omega g_2' + \omega^2 g_3' = \frac{1}{2}(m + \omega n + \omega^2 p) - \frac{1}{4}(c_o + \omega a_o + \omega^2 b_o) = 0$

datorită faptului că triunghiurile MNP şi $A_oB_oC_o$ sînt echilaterale. Prin urmare $G'_1 G'_2 G'_3$ este echilateral.

179. Fie ABC un triunghi echilateral înscris în cercul $\mathcal{C}(O;R)$. Paralele prin A, B, C la o dreaptă oarecare d taie cercul $\mathcal{C}$ în A', B', respectiv C'. Să se arate că :

$$A'A^2 + B'B^2 + C'C^2 = 6R^2.$$

C. Cocea

Soluţie

Luăm ca origine O şi ca axă Ox perpendiculara dusă prin O pe dreapta d. Atunci (A,A'), (B,B'), (C,C') sînt simetrice faţă de d.. Aşadar. avem: A'(ā), B'(b̄), C'(c̄). Avem:

$A'A^2 = (a - \bar{a})(\bar{a} - a) =$

$= R^2 - a^2 - \bar{a}^2 + R^2$. Deci:

(1) $A'A^2 = 2R^2 - a^2 - \bar{a}^2$

Avem încă două relaţii analoage. Atunci:

(2) $A'A^2 + B'B^2 + C'C^2 =$

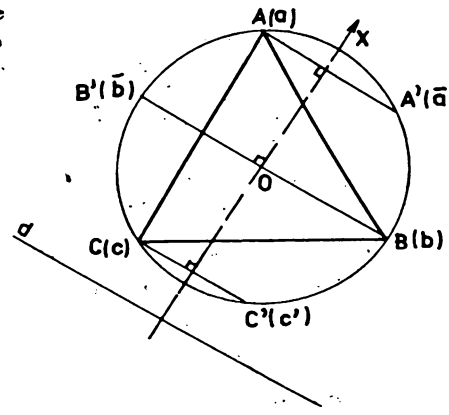
$= 6R^2 - \sum a^2 - \sum \bar{a}^2$

Dar a, b, c sînt rădăcinile ecuaţiei $z^3 = \lambda R^3$ cu $|\lambda| = 1$

Deci $\sum a^2 = \sum \bar{a}^2 = 0$, prin urmare:

(3) $A'A^2 + B'B^2 + C'C^2 =$

$= 6R^2$.



180. Fie ABC şi A'B'C' două triunghiuri echilaterale, cu aceeaşi orientare, avînd centrele O şi O'. Să se arate că dacă G_1, G_2, G_3 sînt centrele de greutate ale patrulaterelor AOO'A', BOO'B', respectiv COO'C', atunci triunghiul $G_1G_2G_3$ este echilateral.

C. Cocea

Soluţie

Triunghiurile ABC şi A'B'C' fiind în particular asemenea, există o transformare $T(z)= pz + q$ încît:

$a' = T(a) = pa + q$

$b' = T(b) = pb + q$

$c' = T(c) = pc + q$

$o' = T(o) = po + q$

Avem:

$4g_1 = a + pa + q + po + q + o = (p + 1)a + (p + 1)o + 2q$

$4g_2 = (p + 1)b + (p + 1)o + 2q$

$4g_3 = (p + 1)c + (p + 1)o + 2q$

Rezultă că:

$4(g_1 + \omega g_2 + \omega^2 g_3) = (p + 1)(a + \omega b + \omega^2 c) +$

$+ (p + 1)o(1 + \omega + \omega^2) + 2q(1 + \omega + \omega^2) = 0$

deoarece $1 + \omega + \omega^2 = 0$, iar $a + \omega b + \omega^2 c = 0$, întrucît ABC este echilateral. Deci $G_1G_2G_3$ este echilateral.

181. Fie OA_1A_2 şi OB_1B_2 două triunghiuri echilaterale la fel orientate. Notăm cu G_1 şi G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor OA_1B_1 respectiv OA_2B_2. Să se arate că triunghiul OG_1G_2 este echilateral.

C. Cocea

Soluţie

Considerăm pe O ca origine şi triunghiurile orientate pozitiv. Triunghiurile fiind asemenea, există o transformare T, $T(z) = pz + q$ care transformă triunghiul OA_1A_2 în OB_1B_2. Cum

$T(O) = O$ rezultă $q = 0$. Aşadar $b_1 = pa_1$ şi $b_2 = pa_2$. Considerăm $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$. Avem $a_2 = a_1\varepsilon$ şi prin urmare $b_2 = pa_1\varepsilon$. Dar:

$$g_1 = \frac{a_1 + pa_1}{3} \qquad g_2 = \frac{(a_1 + pa_1)\varepsilon}{3} = \varepsilon g_1$$

Deci G_2 se obţine din G_1 printr-o rotaţie de unghi egal cu 60° în jurul lui O. Prin urmare OG_1G_2 este echilateral.

182. Fie ABC şi A'B'C' două triunghiuri echilaterale invers orientate, de acelaşi centru O. Să se arate că :

a) Cu distanţele AA', BB', CC' se poate forma un triunghi.

b) Rezultatul nu rămîne în general valabil dacă cele două triunghiuri nu au acelaşi centru.

C. Cocea

Soluţie

a) Fie $T(z) = p\bar{z} + q$ o transformare invers asemenea. Cum originea o considerăm în O, iar $T(O) = O$, urmează că $q = 0$, deci $T(z) = p\bar{z}$. Deoarece $T(A) = A'$, $T(B) = B'$, $T(C) = C'$, urmează că $a' = p\bar{a}$, $b' = p\bar{b}$, $c' = p\bar{c}$. Avem:

(1) $(a - a') + (b - b') + (c - c') = (a - p\bar{a}) + (b - p\bar{b}) + (c - p\bar{c}) = 0$,

deoarece $a + b + c = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$, întrucît triunghiul ABC este echilateral. Din (1) rezultă:

(2) $|a - a'| \leq |b - b'| + |c - c'|$ sau

(3) $AA' \leq BB' + CC'$

La fel se deduc încă două inegalităţi. Deci cu AA', BB', CC' se formează un triunghi.

b) Fie ABC un triunghi echilateral de latură l iar $AC' \perp BC$, $AC' = l$ şi fie B' încît $AB' = l$ şi $\sphericalangle CAB' = 30^\circ$. Triunghiul AB'C' este, evident, echilateral invers orientat faţă de triunghiul ABC. Triunghiul ABB' este dreptunghic în A, deci $BB' = l\sqrt{2}$. Apoi $CC' = 2l\sin 15^\circ = \frac{l}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. Dar cu segmentele AA, BB', CC' nu se poate forma un triunghi (degenerat) întrucît $BB' \neq CC'$. Făcînd o translaţie de vector $\vec{v}$ de direcţie oarecare, AB'C' va ocupa poziţia A"B"C". Fie $|\vec{v}| = \varepsilon$. Deoarece $AA" = \varepsilon$, $CC" < CC' + \varepsilon$, $B"B > BB' - \varepsilon$, pentru $\varepsilon < \frac{1}{3}\left(l\sqrt{2} - \frac{l}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})\right)$ avem $B"B > AA" + CC"$. Deci există o infinitate de triunghiuri invers asemenea (de centre diferite) încît cu distanţele dintre vîrfurile lor să nu se poată construi un triunghi.

83. Fie M un punct în planul triunghiului echilateral ABC. Fie M_1, M_2, M_3 proiecţiile lui M pe BC, CA şi AB. Se notează cu G centrul de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$ şi cu O centrul triunghiului ABC. Să se arate că G este mijlocul lui MO.

oluţie

Să notăm cu S_1, S_2, S_3 simetricele lui M faţă de laturi. Fie A(a), B(b), C(c) cu $a = 1$, $b = \omega$, $c = \omega^2$. Avem:

$$\chi_{BC} = \frac{b-c}{\bar{b}-\bar{c}} = \frac{b-c}{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}} = -bc$$

Deci (*) $\chi_{BC} = -bc$.

Ecuaţia dreptei BC va fi:

(1) $z - b = -bc(\bar{z} - \bar{b})$ sau

(2) $z + bc\bar{z} = b + c$

Cum $MM_1 \perp BC$, $\chi_{MM_1} = -\chi_{BC} = bc$. Ecuaţia lui MM_1 va fi:

(3) $z - m = bc(\bar{z} - \bar{m})$ sau

(4) $z - bc\bar{z} = m - bc\bar{m}$

Din rezolvarea sistemului format de ecuaţiile (2) şi (4) rezultă afixul lui M_1. Adunînd (2) cu (4) obţinem:

(5) $2z = b + c + m - bc\bar{m}$, de unde:

(**) $m_1 = \frac{1}{2}(b + c + m - bc\bar{m})$

Dar $s_1 + m = 2m_1$; rezultă

(***) $s_1 = b + c - bc\bar{m}$

Avînd în vedere (**) şi formulele analoage, rezultă:

$2(m_1 + m_2 + m_3) = 2(a + b + c) + 3m - \bar{m}(ab + bc + ca) = 3m$

deoarece $ab + bc + ca = a + b + c = 0$. Aşadar

$$\frac{m_1+m_2+m_3}{3} = g = \frac{m}{2}$$

Deci G este mijlocul lui OM.

Observaţii

a. De formula (***) nu am avut nevoie în rezolvarea problemei, dar a fost stabilită pentru rezolvarea unor probleme ulterioare.

b. Formulele (**) şi (***) rămîn valabile pentru un triunghi oarecare înscris în cercul de rază unitate.

184. Fie ABC un triunghi, iar M un punct în interiorul său. Notăm cu M_1, M_2, M_3 proiecţiile lui M pe laturile BC, CA, AB iar G centrul de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Dacă pentru două poziţii diferite ale lui M, G este mijlocul lui MO, atunci triunghiul ABC este echilateral.

conf.dr. D. Brânzei şi prof. C. Cocea

Soluţie

Fie $\mathcal{R}(O;1)$, O fiind originea planului. În conformitate cu formula (**) din problema precedentă avem:

$2m_1 = b + c + m - bc\bar{m}$
$2m_2 = c + a + m - ca\bar{m}$
$2m_3 = a + b + m - ab\bar{m}$

Fie P mijlocul lui MO. Evident $p = \frac{m}{2}$. Avem:

$$g = \frac{1}{6}[2(a+b+c)+3m-(ab+bc+ca)\bar{m}]$$

Atunci din g = p rezultă:

(1) $2(a + b + c) = \bar{m}(ab + bc + ca)$

Dacă $a + b + c \neq 0$ din (1) rezultă:

(2) $$\bar{m} = \frac{2(bc+ca+ab)}{a+b+c}$$

Pentru două poziţii ale lui M am avea aceeaşi expresie pentru $\bar{m}$, contradicţie. Deci $a + b + c = 0$ şi din (1) rezultă $ab + bc + ca = 0$. Deci a, b, c sînt rădăcinile unei ecuaţii de forma $z^3 - \rho = 0$, adică a, b, c sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral.

185. Fie ABC un triunghi echilateral înscris în $\mathcal{R}(O;R)$, iar $P \in \mathcal{R}$ şi Q oarecare în planul triunghiului. Să se arate că proiecţiile lui Q pe dreptele PA, PB, PC formează un triunghi echilateral.

C. Cocea

Soluţie

Notăm cu Q_1, Q_2, Q_3 proiecţiile luiQ pe dreptele PA, PB, PC. Conforrm formulei (**) din problema 183 avem:

$2q_1 = a + p + q - apq = a(1 - p\bar{q}) + (p + q)$
$2q_2 = b(1 - p\bar{q}) + p + q$
$2q_3 = c(1 - p\bar{q}) + p + q$

Prin urmare:

$2(q_1 + \omega q_2 + \omega^2 q_3) = (1 - pq)(a + b\omega + c\omega^2) +$
$+ (p + q)(1 + \omega + \omega^2) = 0,$
deoarece $a + b\omega + c\omega^2 = 0$ întrucît ABC este echilateral iar $1 + \omega + \omega^2 = 0$.
Rezultă că triunghiul $Q_1Q_2Q_3$ este echilateral.

186. Fie ABC un triunghi echilateral, M în planul triunghiului, iar S_1, S_2, S_3 simetricele lui M față de laturi. Să se arate că centrul de greutate al triunghiului $S_1S_2S_3$ coincide cu centrul cercului circumscris triunghiului.

Soluție

Avem, conform formulei (***) din problema 183:
$s_1 = b + c - bc\bar{m}$
$s_2 = a + c - ac\bar{m}$
$s_3 = a + b - ab\bar{m}$
Considerăm $a = 1$, $b = \omega$, $c = \omega^2$. Avem:
$s_1 + s_2 + s_3 = 2(a + b + c) - (ab + bc + ca)\bar{m} = 0$
deoarece $a + b + c = ab + bc + ca = 0$.
Rezultă că centrul de greutate al triunghiului $S_1S_2S_3$ coincide cu O — centrul cercului circumscris triunghiului.

187. Fie ABC un triunghi echilateral, M în planul triunghiului, iar M_1, M_2, M_3 simetricele lui M față de BC, CA respectiv AB. Notăm cu P_1, P_2, P_3 mijloacele segmentelor AM_1, BM_2, CM_3. Să se arate că triunghiul $P_1P_2P_3$ este echilateral.

C. Cocea

Soluție

Conform formulei (***) din problema 183, avem:
$m_1 = b + c - bc\bar{m}$; $m_2 = c + a - ca\bar{m}$; $m_3 = a + b - ab\bar{m}$
Atunci:

$$(1)\quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{a+m_1}{2} = \dfrac{a+b+c-bc\bar{m}}{2} = -\dfrac{1}{2}\,bc\bar{m} \\ p_2 = -\dfrac{1}{2}\,ac\bar{m} \\ p_3 = -\dfrac{1}{2}\,ab\bar{m} \end{cases}$$

Putem considera $a = 1$, $b = \omega$, $c = \omega^2$. Avem:

$$p_1 + \omega^2 p_2 + \omega p_3 = -\frac{1}{2}\bar{m}(\omega\cdot\omega^2 + 1\cdot\omega^2\cdot\omega^2 + 1\cdot\omega\cdot\omega) =$$

$$= -\frac{1}{2}\bar{m}(1 + \omega + \omega^2) = 0$$

Deci $P_1P_2P_3$ este echilateral.

188. Fie M un punct în planul triunghiului echilateral ABC, iar M_1, M_2, M_3 proiecțiile lui M pe BC, CA, respectiv AB. Să se arate că centrele de greutate G_1, G_2, G_3 ale triunghiurilor $A'M_2M_3$, $B'M_3M_1$, $C'M_1M_2$ formează un triunghi echilateral, unde A', B', C' sînt mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB.

C. Cocea

Soluție

Putem considera $a = 1$, $b = \omega$, $c = \omega^2$. Avem $a' = \frac{b+c}{2} = -\frac{a}{2}$(deoarece $a + b + c = 0$). Conform formulei (**) din problema 183, putem scrie:

$m_1 = -\frac{1}{2}(b + c + m - bc\bar{m})$

$m_2 = \frac{1}{2}(c + a + m - ca\bar{m})$

$m_3 = \frac{1}{2}(a + b + m - ab\bar{m})$

Prin urmare:

$$3g_1 = a' + m_2 + m_3 = \frac{1}{2}[a + b + c + 2m - a(b + c)\bar{m}] = \frac{1}{2}(2m + a^2\bar{m})$$

Analog: $3g_2 = \frac{1}{2}(2m + b^2\bar{m})$

$$3g_3 = \frac{1}{2}(2m + c^2\bar{m})$$

Deci: $3(g_1 + \omega^2 g_2 + \omega g_3) = \frac{1}{2}\, 2m(1 + \omega^2 + \omega) +$

$+ m(1 + \omega^2 \cdot \omega^2 + \omega \cdot \omega^4) = 0$, deoarece $1 + \omega + \omega^2 = 0$ și $\omega^3 = 1$.

Deci $G_1G_2G_3$ este echilateral.

189. Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri echilaterale invers orientate, de același centru. Notăm cu S_1, S_2, S_3 simetricele vîrfurilor A', B', C' față de dreptele BC, CA, respectiv AB. Să se arate că :

a) Segmentele AS_1, BS_2, CS_3 au același mijloc.

b) Triunghiul $S_1S_2S_3$ este echilateral.

C. Cocea

Soluție

a) Putem considera $a = 1$, $b = \omega$, $c = \omega^2$. La fel ca în problema 182, rezultă că există $p \in C$ încît $a' = p\bar{a}$; $b' = p\bar{b}$ și $c' = p\bar{c}$. Avînd în vedere formula (***) din problema 183, putem scrie:

(1) $\quad s_1 = b + c - bcap = -a - bcap$

$\quad\quad s_2 = -b - cabp$

$\quad\quad s_3 = -c - abcp$

Fie M_1, M_2, M_3 mijloacele segmentelor AS_1, BS_2, CS_3. Avem:

$2m_1 = -abcp$

$2m_2 = -abcp$

$2m_3 = -abcp$

Deci $m_1 = m_2 = m_3 = -\frac{1}{2}abcp$, prin urmare $M_1 = M_2 = M_3$.

b) Din (1) rezultă:

$s_1 + \omega s_2 + \omega^2 s_3 = -(a + \omega b + \omega^2 c) - abcp(1 + \omega + \varphi^2) = 0$,

deoarece $a + \omega b + \omega^2 c = 0$ și $1 + \omega + \omega^2 = 0$. Deci $S_1S_2S_3$ este echilateral.

190. Fie ABC şi A'B'C' două triunghiuri echilaterale, de acelaşi centru, invers orientate. Notăm cu M_1, M_2, M_3 simetricele lui A', B', C' faţă de laturile BC, CA, respectiv AB. Să se arate că:

a) Centrele de greutate ale triunghiurilor BCM_1, CAM_2, ABM_3 formează un triunghi echilateral.

b) Centrele de greutate ale patrulaterelor BCM_2M_3, CAM_3M_1, ABM_1M_2 coincid.

Soluţie

a) Fie A(a), B(b), C(c). Putem considera $a = 1$, $b = \omega$, $c = \omega^2$.

Atunci

(1) $a + b + c = 0$

Triunghiurile echilaterale ABC şi A'B'C' fiind de acelaşi centru şi invers orientate, există

$\rho \in C$ încît: $a' = \rho\bar{a}$, $b' = \rho\bar{b}$, $c' = \rho\bar{c}$.

Conform formulei (***) din soluţia problemei 183, avem:

$$m_1 = b + c - bca\bar{\rho}$$

Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor BCM_1, CAM_2, ABM_3. Avem:

(2) $3g_1 = b + c + m_1 = 2(b + c) - abc\bar{\rho} = -2a - abc\bar{\rho}$

Analog

(3) $3g_2 = -2b - abc\bar{\rho}$

(4) $3g_3 = -2c - abc\bar{\rho}$

Din (2), (3) şi (4) rezultă:

$3(g_1 + \omega g_2 + \omega^2 g_3) = -2(a + \omega b + \omega^2 c) - abc\bar{\rho}(1 + \omega + \omega^2) = 0$

deoarece $a + \omega b + \omega^2 c = 0$ şi $1 + \omega + \omega^2 = 0$. Rezultă că triunghiul $G_1G_2G_3$ este echilateral.

b) Notăm cu G'_1, G'_2, G'_3 centrele de greutate ale patrulaterelor BCM_2M_3, CAM_3M_1, respectiv ABM_1M_2. Avem:

$4g'_1 = b + c + m_2 + m_3 = b + c + c + a - abc\bar{\rho} + a +$

$+ b - abc\bar{\rho} = 2(a + b + c) - 2abc\bar{\rho} = -2abc\bar{\rho}$,

în virtutea relaţiei (1).

Analog pentru g'_2, g'_3. Urmează că $G'_1 = G'_2 = G'_3$.

191. Fie $\widehat{ABC}$ şi A'B'C' două triunghiuri echilaterale, de acelaşi centru, la fel orientate. Să se arate că :

a) Proiecţiile vîrfurilor unui triunghi pe laturile corespunzătoare ale celuilalt triunghi, formează un triunghi echilateral.

b) Simetricele vîrfurilor unui triunghi faţă de laturile corespunzătoare ale celuilalt triunghi, formează un triunghi echilateral.

C. Cocea

Soluţie

a) Fie P_1, P_2, P_3 proiecţiile punctelor A', B', C' pe laturile BC, CA, respectiv AB. Fie A(a), B(b), C(c). Putem considera $a = 1$, $b = \omega$, $c = \omega^2$. Deoarece triunghiurile echilaterale

ABC şi A'B'C' au acelaşi centru, există $\rho \in C$ încît $a' = \rho a$, $b' = \rho b$, $c' = \rho c$. Conform formulei (**) din soluţia problemei 183, avem:

(1) $2p_1 = b + c + a' - bca' = b + c + a' - bca\rho$

Dar $abc = 1$, de unde $bc = \frac{1}{a}$ şi atunci $bc\bar{a} = \frac{1}{a^2} = a$, întrucît $a^3 = 1$. De asemenea,

$b + c = -a$,

deoarece $a + b + c = 0$. Atunci (1) devine:

(2) $2p_1 = -a + a' - a\bar{\rho} = -a(1 + \bar{\rho}) + a'$

Analog

(3) $2p_2 = -b(1 + \bar{\rho}) + b'$

(4) $2p_3 = -c(1 + \bar{\rho}) + c'$

Din (2), (3) şi (4) urmează:

$2(p_1 + \omega p_2 + \omega^2 p_3) = -(1 + \bar{\rho})(a + \omega b + \omega^2 c) + (a' + \omega b' + \omega^2 c') = 0$

deoarece $a + \omega b + \omega^2 c = a' + \omega b' + \omega^2 c' = 0$

întrucît triunghiurile ABC şi A'B'C' sînt echilaterale.

Deci $P_1P_2P_3$ este echilateral.

b) Fie S_1, S_2, S_3 simetricele punctelor A', B', C' faţă de BC, CA respectiv AB. Avînd în vedere formula (***) din soluţia problemei 183, avem:

(5) $s_1 = b + c - bca' = -a - bc\rho a = -a - a\bar{\rho}$

Deci

(6) $s_1 = -(1 + \bar{\rho})a$

Obţinem analog formulele pentru s_2 şi s_3. Atunci:

(7) $s_1 + \omega s_2 + \omega^2 s_3 = -(1 + \bar{\rho})(a + \omega b + \omega^2 c) = 0$

Deci triunghiul $S_1S_2S_3$ este echilateral.

192. Fie M un punct în planul triunghiului echilateral ABC. Să se arate că simetricele dreptelor MA, MB, MC faţă de BC, CA respectiv AB sînt concurente.

C. Cocea

Soluţie

Fie A(a), B(b), C(c). Putem considera $a = 1$, $b = \omega$, $c = \omega^2$. Notăm cu A_1, A_2, A_3 simetricele vîrfurilor A, B, C faţă de BC, CA, respectiv AB, iar cu M_1, M_2, M_3 simetricele lui M faţă de laturi. Deoarece $\overline{OA_1} = -2\overline{OA}$ rezultă $a_1 = -2a$ şi analog $b_1 = -2b$, $c_1 = -2c$. Conform relaţiei (***) din soluţia problemei 183 avem:

$m_1 = b + c - bc\bar{m} = -a - a\bar{m}$ (deoarece $a + b + c = 0$ şi $abc = 1$)

$m_2 = -b - b\bar{m}$

$m_3 = -c - c\bar{m}$.

Ecuaţia dreptei A_1M_1 este:

(1) $z(\bar{a}_1 - \bar{m}_1) - \bar{z}(a_1 - m_1) + a_1\bar{m}_1 - \bar{a}_1 m_1 = 0$

Dar $a_1 - m_1 = -2a + a + a\bar{m} = -a + a\bar{m}$ şi

$a_1\bar{m}_1 - \bar{a}_1 m_1 = -2a(-a - am) - 2\bar{a}(-a - am) = 2a^2\bar{m} - 2\bar{a}^2 m$

Atunci ecuaţia dreptei (A_1M_1) este conform cu (1) dată de:

(2) $z(-\bar{a} + am) - \bar{z}(-a + \bar{a}\bar{m}) + 2a^2\bar{m} - 2\bar{a}^2 m = 0$ (A_1M_1)

Analog

(3) $z(-\bar{b} + bm) - \bar{z}(-b + \bar{b}\bar{m}) + 2b^2\bar{m} - 2\bar{b}^2 m = 0$ (A_2M_2)

(4) $z(-\bar{c} + cm) - \bar{z}(-c + \bar{c}\bar{m}) + 2c^2\bar{m} - 2\bar{c}^2 m = 0$ (A_3M_3)

Observăm că suma membrilor întîi ai ecuațiilor (2), (3) și (4) este 0, în virtutea egalităților

$a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2 = 0$

Rezultă că dreptele A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3 sînt concurente.

193. Fie ABC un triunghi echilateral, M în planul triunghiului. Notăm cu S_1, S_2, S_3 simetricele lui M față de BC, CA respectiv AB, cu G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AS_2S_3, BS_3S_1, CS_1S_2 iar cu M_1, M_2, M_3 mijloacele segmentelor S_2S_3, S_3S_1 respectiv S_1S_2. Mai notăm cu A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului. Să se arate că se poate forma un triunghi cu segmentele:
a) AS_1, BS_2, CS_3
b) $A'S_1$, $B'S_2$, $C'S_3$
c) AM_1, BM_2, CM_3
d) S_1G_1, S_2G_2, S_3G_3
e) $A'M_1$, $B'M_2$, $C'M_3$

C. Cocea

Soluție

Fie originea în centrul triunghiului. Putem considera că $a = 1$, $b = \omega$, $c = \omega^2$. Vom demonstra a) și c), celelalte demonstrații făcîndu-se analog.

Conform formulei (***) din soluția problemei 183 avem:

(1) $s_1 = b + c - bc\bar{m}$
$s_2 = a + c - ac\bar{m}$
$s_3 = a + b - ab\bar{m}$.

Atunci

(2) $m_1 = \dfrac{s_2 + s_3}{2} = \dfrac{1}{2}(2a + b + c - ac\bar{m} - ab\bar{m})$

și încă două relații analoage.

(3) $g_1 = \dfrac{a + s_2 + s_3}{3} = \dfrac{1}{3}(3a + b + c - ac\bar{m} - ab\bar{m})$

a) Vom demonstra relația

(4) $(a - s_1) + (b - s_2) + (c - s_3) = 0$

Avînd în vedere relațiile (1) putem scrie

$(a - s_1) + (b - s_2) + (c - s_3) = a + b + c - 2(a + b + c) +$
$+ \bar{m}(ab + bc + ca) = -(a + b + c) + \bar{m}(ab + bc + ca) = 0,$

deoarece $a + b + c = ab + bc + ca = 0$, întrucît ABC este triunghi echilateral.

Din (4) rezultă:

$|a - s_1| \leq |b - s_2| + |c - s_3|$, adică $AS_1 \leq BS_2 + CS_3$.

Analog se demonstrează celelalte două inegalități.

c) Vom arăta că

(5) $(a - m_1) + (b - m_2) + (c - m_3) = 0$

Avem:

$(a - m_1) + (b - m_2) + (c - m_3) = (a + b + c) - 2(a + b + c) -$
$- \bar{m}(ab + bc + ca) = 0.$

Analog ca la punctul a) rezultă că putem forma un triunghi cu segmentele AM_1, BM_2, CM_3.

194. Fie ABC un triunghi echilateral, iar M în planul triunghiului. Notăm cu M_1, M_2, M_3 simetricele lui M față de BC, CA respectiv AB, iar cu G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale patrulaterelor BCM_2M_3, CAM_3M_1, ABM_1M_2. Să se arate că triunghiul $G_1G_2G_3$ este echilateral.

C. Cocea

Soluție

Fie A(a), B(b), C(c). Putem considera $a = 1$, $b = \omega$, $c = \omega^2$. Avînd în vedere formula (***) din problema 183, putem scrie:

$m_1 = b + c - bc\bar{m}$

$m_2 = a + c - ac\bar{m}$

$m_3 = a + b - ab\bar{m}$

Atunci

(1) $4g_1 = b + c + m_2 + m_3 = 2(a + b + c) - a(b + c)\bar{m} = a^2\bar{m}$

deoarece $a + b + c = 0$. Analog

$4g_2 = b^2\bar{m}$

$4g_3 = c^2\bar{m}$.

Atunci:

$4(g_1 + \omega^2 g_2 + \omega g_3) = \bar{m}(a^2 + \omega^2 b^2 + \omega c^2) =$

$= \bar{m}(1 + \omega^2 \cdot \omega^2 + \omega \cdot \omega^4) = \bar{m}(1 + \omega + \omega^2) = 0$

Deoarece $g_1 + \omega^2 g_2 + \omega g_3 = 0$, rezultă că triunghiul $G_1G_2G_3$ este echilateral.

195. Dacă simetricele unei drepte d ce intersectează în două puncte distincte cercul circumscris unui triunghi echilateral, față de laturile triunghiului sînt concurente, atunci dreapta trece prin centrul cercului.

C. Cocea

Soluție

Fie M(m), N(n) punctele în care d taie cercul, iar A(a), B(b), C(c) vîrfurile triunghiului. Putem considera că $a = 1$, $b = \omega$, $c = \omega^2$. Atunci:

(1) $a + b + c = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = a^2 + b^2 + c^2 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2 = 0$

Fie M_1 și N_1 simetricele lui M și N față de BC, M_2, N_2 simetricele lui M și N față de CA și M_3, N_3 simetricele lui M și N față de AB.

Conform formulei (***) din problema 183, avem:

$m_1 = b + c - bc\bar{m} = -a - \bar{a}\bar{m}$

$n_1 = -a - \bar{a}\bar{n}$

Atunci: $m_1 - n_1 = a(\bar{n} - \bar{m})$, iar

$m_1\bar{n}_1 - \bar{m}_1 n_1 = a^2 n + \bar{a}^2\bar{m} - \bar{a}^2\bar{n} - a^2 m + \bar{m}n - m\bar{n}$

Atunci ecuația dreptei M_1N_1 este dată de :

$z(\bar{m}_1 - \bar{n}_1) - \bar{z}(m_1 - n_1) + m_1\bar{n}_1 - \bar{m}_1 n_1 = 0$

adică:

(2) $z(\bar{n} - \bar{m})a - \bar{z}(n - m) + a^2 n + \bar{a}^2\bar{m} - \bar{a}^2\bar{n} - a^2 m + \bar{m}n - m\bar{n} = 0$

Scriind încă două ecuații analoage pentru dreptele M_2N_2 și M_3N_3 observăm că în virtutea relațiilor (1) suma coeficienților lui z și $\bar{z}$ este 0, iar suma termenilor liberi

este $3(\bar{m}n - m\bar{n})$. Cum dreptele sînt concurente, rezultă $\bar{m}n - m\bar{n} = 0$ sau $\frac{n}{m} = \frac{\bar{m}}{\bar{n}}$ $\Leftrightarrow (m + n)(m - n) = 0 \Leftrightarrow m = -n$. Deci M şi N sînt diametral opuse.

Observaţie.

Deoarece pentru o dreaptă d ce trece prin centru $\bar{m}n - m\bar{n} = 0$, din cele de mai sus rezultă că simetricele lui d faţă de laturile triunghiului sînt concurente. Deci are loc şi reciproca.

196. Fie ABC un triunghi echilateral de centru O, iar M un punct în planul triunghiului. Notăm cu M_1, M_2, M_3 simetricele lui M faţă de BC, CA, respectiv AB, iar cu P_1, P_2, P_3 mijloacele segmentelor OM_1, OM_2, OM_3. Să se arate că dreptele AP_1, BP_2, CP_3 sînt concurente.

C. Cocea

Soluţie

Fie $a = 1$, $b = \omega$, $c = \omega^2$. Avem:

(*) $a + b + c = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = a^2 + b^2 + c^2 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2 = 0$

Conform formulei (***) din soluţia problemei 183, avem:

(2) $s_1 = b + c - bc\bar{m} = -a - \bar{a}\bar{m}$

Atunci:

(3) $p_1 = -\frac{1}{2}(a + \bar{a}\bar{m})$

Avem $a\bar{p}_1 - \bar{a}p_1 = \frac{1}{2}(a^2m - \bar{a}^2\bar{m})$. Ecuaţia dreptei AP_1 este:

(4) $z(\bar{a} - \bar{p}_1) - \bar{z}(a - p_1) + a\bar{p}_1 - \bar{a}p_1 = 0$

sau:

(5) $z(\frac{3}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}am) - \bar{z}(\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}\bar{a}\bar{m}) - \frac{1}{2}(a^2m - \bar{a}^2\bar{m}) = 0$

Analog ecuaţiile dreptelor BP_2 şi CP_3 sînt date de (6) şi (7):

(6) $z(\frac{3}{2}\bar{b} + \frac{1}{2}bm) - \bar{z}(\frac{3}{2}b + \frac{1}{2}\bar{b}\bar{m}) - \frac{1}{2}(b^2m - \bar{b}^2\bar{m}) = 0$

(7) $z(\frac{3}{2}\bar{c} + \frac{1}{2}cm) - \bar{z}(\frac{3}{2}c + \frac{1}{2}\bar{c}\bar{m}) - \frac{1}{2}(c^2m - \bar{c}^2\bar{m}) = 0$

Observăm că suma membrilor stîngi ai ecuaţiilor (5), (6) şi (7) este 0, în virtutea relaţiilor (1), de unde rezultă concurenţa dreptelor AP_1, BP_2, CP_3.

197. Fie ABC un triunghi echilateral de centru O, iar M un punct în planul triunghiului. Notăm cu M_1, M_2, M_3 simetricele lui M faţă de laturile BC, CA, respectiv AB, iar cu S_1, S_2, S_3 simetricele punctelor M_1, M_2, M_3 faţă de O. Să se arate că :

a) Dreptele AS_1, BS_2, CS_3 sînt concurente.

b) Cu segmentele AS_1, BS_2, CS_3 se poate forma un triunghi.

C. Cocea

Soluţie

Fie A(a), B(b), C(c). Putem considera că $a = 1$, $b = \omega$, $c = \omega^2$. Atunci:

(1) $a + b + c = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = a^2 + b^2 + c^2 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2 = 0$

Avînd în vedere formula (***) din soluţia problemei 183, avem:

(1) $m_1 = b + c - bc\bar{m} = -a - \bar{a}\bar{m}$ deoarece $a + b + c = 0$ şi $abc = 1$

Atunci

(2) $s_1 = a + \bar{a}\bar{m}$

Avem

(3) $a\bar{s}_1 - \bar{a}s_1 = a(\bar{a} + am) - \bar{a}(a + \bar{a}\bar{m}) = a^2m - \bar{a}^2\bar{m}$

Ecuaţia dreptei AS_1 este:

(4) $z(\bar{a} - \bar{s}_1) - \bar{z}(a - s_1) + a\bar{s}_1 - \bar{a}s_1 = 0$ sau

(5) $z(-am) - \bar{z}(-\bar{a}\bar{m}) + a^2m - \bar{a}^2\bar{m} = 0$ (AS_1)

Analog ecuaţiile dreptelor BS_2, CS_3 sînt date de (6) şi (7):

(6) $z(-bm) - \bar{z}(-\bar{b}\bar{m}) + b^2m - \bar{b}^2\bar{m} = 0$ (BS_2)

(7) $z(-cm) - \bar{z}(-\bar{c}\bar{m}) + c^2m - \bar{c}^2\bar{m} = 0$ (CS_3)

Se observă că suma membrilor stîngi ai ecuaţiilor (5), (6), (7) este 0 în virtutea relaţiilor (*), ceea ce probează concurenţa dreptelor AS_1, BS_2, CS_3.

b) Avem $(a - s_1) + (b - s_2) + (c - s_3) = -\bar{a}\bar{m} - \bar{b}\bar{m} - \bar{c}\bar{m} =$
$= -\bar{m}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) = 0$. Din

(8) $(a - s_1) + (b - s_2) + (c - s_3) = 0$

rezultă

$|a - s_1| \leq |b - s_1| + |c - s_3|$ sau

(9) $AS_1 \leq BS_2 + CS_3$.

Analog demonstrăm şi celelalte două inegalităţi.

198. Fie S_1, S_2, S_3 simetricele unui punct M faţă de laturile BC, CA, AB ale triunghiului echilateral ABC. Notăm cu G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor BCS_1, CAS_2, ABS_3. Să se arate că :

a) Dreptele AG_1, BG_2, CG_3 sînt concurente.

b) Cu segmentele AG_1, BG_2, CG_3 se poate construi un triunghi.

c) Centrul de greutate al triunghiului $G_1G_2G_3$ coincide cu centrul triunghiului ABC.

C. Cocea

Soluţie

a) Fie A(a), B(b), C(c). Putem considera că $a = 1$, $b = \omega$, $c = \omega^2$. Atunci:

(1) $a + b + c = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = a^2 + b^2 + c^2 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2 = 0$

şi

(2) $abc = 1$.

Avînd în vedere formula (***) din soluţia problemei 183, avem:

$s_1 = b + c - bc\bar{m}$.

Atunci:

$3g_1 = 2(b + c) - bc\bar{m} = -2a - \bar{a}\bar{m}$ (s-a avut în vedere (1) şi (2))

Avem:

(3) $a - g_1 = \frac{5a}{3} + \frac{\bar{a}\bar{m}}{3}$

iar

(4) $a\bar{g}_1 - \bar{a}g_1 = -\frac{1}{3}(a^2m - \bar{a}^2\bar{m})$

Ecuaţia dreptei AG_1, este:

(5) $z(\bar{a} - \bar{g}_1) - \bar{z}(a - g_1) + a\bar{g}_1 - \bar{a}g_1 = 0$

Avînd în vedere (3) şi (4), (5), devine:

(6) $z\left(\frac{5\bar{a}}{3} + \frac{am}{3}\right) - \bar{z}\left(\frac{5a}{3} + \frac{\bar{a}\bar{m}}{3}\right) - \frac{1}{3}(a^2m - \bar{a}^2\bar{m}) = 0$

Ecuaţiile dreptelor BG_2, CG_3 se obţin analog şi sînt date de (7) şi (8):

(7) $z\left(\frac{5\bar{b}}{3} + \frac{bm}{3}\right) - \bar{z}\left(\frac{5b}{3} + \frac{\bar{b}\bar{m}}{3}\right) - \frac{1}{3}(b^2m - \bar{b}^2\bar{m}) = 0$

(8) $z\left(\frac{5\bar{c}}{3} + \frac{cm}{3}\right) - \bar{z}\left(\frac{5c}{3} + \frac{\bar{c}\bar{m}}{3}\right) - \frac{1}{3}(c^2m - \bar{c}^2\bar{m}) = 0$

Observăm că suma membrilor întîi ai ecuaţiilor (6), (7) şi (8) este 0 în virtutea relaţiilor (1), ceea ce arată concurenţa dreptelor AG_1, BG_2, CG_3.

b) Conform relaţiei (3) şi celor analoage:

$$(a - g_1) + (b - g_2) + (c - g_3) = \frac{5}{3}(a + b + c) + \frac{\bar{m}}{3}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) = 0$$

Din

(9) $(a - g_1) + (b - g_2) + (c - g_3) = 0$

rezultă $|a - g_1| \leq |b - g_2| + |c - g_3|$, adică $AG_1 \leq BG_2 + CG_3$.

Analog se demonstrează încă două inegalităţi.

c) Avem $g_1 = -\frac{1}{3}(2a + \bar{a}m)$ $g_2 = -\frac{1}{3}(2b + \bar{b}m)$ $g_3 = -\frac{1}{3}(2c + \bar{c}m)$

$$\frac{1}{3}(g_1 + g_2 + g_3) = -\frac{1}{9}[2(a + b + c) + m(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})] = 0$$

deci centrul de greutate al triunghiului $G_1G_2G_3$ coincide cu centrul triunghiului ABC.

199. Fie ABC un triunghi echilateral, P un punct oarecare, iar P_1, P_2, P_3 proiecţiile pe laturi ale punctului P. Notăm cu G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AP_2P_3, BP_1P_3, CP_1P_2. Să se arate că centrul de greutate G_0 al triunghiului $G_1G_2G_3$, punctul P şi centrul O al cercului circumscris triunghiului sînt coliniare.

C. Cocea

Soluţie

Fie A(a), B(b), C(c). Putem considera că $a = 1$, $b = \omega$, $c = \omega^2$. Avînd în vedere formula (**) din soluţia problemei 183, avem:

(1) $2p_1 = b + c + p - bc\bar{p}$

$2p_2 = a + c + p - ac\bar{p}$

$2p_3 = a + b + p - ab\bar{p}$

Avem:

(2) $g_1 = \frac{1}{6}(4a + b + c + 2p - a(b+c)\bar{p}) = \frac{1}{6}(3a + 2p + a^2\bar{p})$

Avînd în vedere formulele analoage pentru g_2, g_3 rezultă:

$$g_o = \frac{1}{18}(3a + 3b + 3c + 6p + (a^2 + b^2 + c^2)\bar{p}) = \frac{p}{3}$$

deoarece $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 0$. Din $g_o = \frac{p}{3}$ rezultă că G_o, P, O sînt coliniare.

200. Să se construiască un triunghi ABC, cunoscînd poziţiile vîrfurilor A', B', C' ale triunghiurilor echilaterale construite pe laturi.

Soluţie

Fie originea planului un punct O oarecare iar a, b, c şi a', b', c' afixele vîrfurilor A, B, C respectiv A', B', C'. Deoarece triunghiurile BCA', CAB', ABC' sînt echilaterale, avem:

$$(1)\quad \begin{cases} c + b\omega + a'\omega^2 = 0 \\ a + c\omega + b'\omega^2 = 0 \\ b + a\omega + c'\omega^2 = 0 \end{cases}$$

De unde

$$(2)\quad \begin{cases} c + b\omega = -a'\omega^2 \\ a + c\omega = -b'\omega^2 \\ b + a\omega = -c'\omega^2. \end{cases}$$

Din (2) rezultă $-c\omega - b\omega^2 = a'$. Deci

$$\begin{cases} -c\omega - b\omega^2 = a' \\ c\omega + a = -b'\omega^2 \end{cases}$$

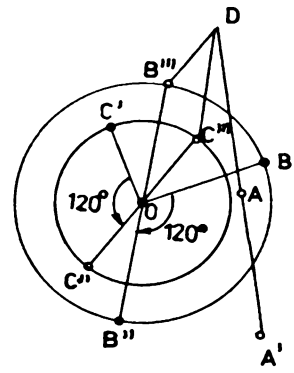
$$/\ a - b\omega^2 = a' - b'\omega^2$$

Putem scrie:

$$\begin{cases} a - b\omega^2 = a' - b'\omega^2 \ /\ -\omega \\ a\omega + b = -c'\omega^2 \end{cases}$$

$$2b = -a'\omega + b' - c'\omega^2$$

Deci $b = \frac{1}{2}(-a'\omega + b' - c'\bar{\omega})$.



Analog

$$a = \frac{1}{2}(a' - b'\bar{\omega} - c'\omega)$$

$$c = \frac{1}{2}(c' - a'\bar{\omega} - b'\omega)$$

Este suficient să arătăm construcţia lui A. Vom roti B' în sensul negativ cu 120° şi vom obţine $B''(b'\bar{\omega})$, vom roti C' în sensul pozitiv cu 120° şi vom obţine $C''(c'\omega)$. Facem simetria lui B'' şi C'' faţă de O şi obţinem $B'''(-b'\bar{\omega})$ şi $C'''(-c'\omega)$.

Fie D de afix - $b'\bar{\omega} - c'\omega$, care se obține ca vîrful al patrulea al paralelogramului cu vîrfurile O, B'', C''.

Atunci A este mijlocul segmentului A'D.

Analog se construiesc punctele B și C.

BIBLIOGRAFIE

1. AVĂDANEI, C. AVĂDANEI, N. BORŞ, C. CIUREA, C. *De la matematica elementară spre matematica superioară*, Editura Academiei, Bucureşti, 1987
2. BORŞ, C. *Numere complexe*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1962
3. BOTEZ, M. *Probleme de geometrie*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1976
4. BRÂNZEI, D. ANIŢA, S. COCEA, C. *Planul şi spaţiul euclidian*, Editura Academiei, Bucureşti, 1986
5. COURANT, R. ROBBINS, H. *Ce este matematica?*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1969
6. CUCULESCU, I. Matematică. *Geometrie - clasa a-VII-a*, E.D.P., Bucureşti, 1990
7. CUCULESCU, I. ş.a. *Culegere de probleme pentru admitere în învăţământul superior*, Editura ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1984
8. CUCULESCU, I. *Olimpiadele internaţionale de matematică ale elevilor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1984
9. DUMITREASA, GH. ş.a. *Enunţurile şi soluţiile problemelor date la barajele pentru selecţionarea loturilor lărgite şi echipelor naţionale de matematică*, Piatra Neamţ, 1984
10. IONESCU-ŢIU, C. *Geometrie plană şi în spaţiu*, Editura Albatros, Bucureşti, 1976
11. IANUŞ, ŞT. ş.a. *Probleme de geometrie şi trigonometrie*, E.D.P. Bucureşti, 1983
12. LEONTE, A. TRANDAFIR, R. *Principii şi structuri fundamentale în matematica de liceu (vol. II)*, Editura Albatros, Bucureşti, 1986
13. MIHĂILEANU, N. ş.a. *Culegere de probleme de geometrie sintetică şi proiectivă*, E.D.P. 1971
14. MIHĂILEANU, N. *Utilizarea numerelor complexe în geometrie*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1968
15. MIRET, D. *Aplicaţii ale numerelor complexe în geometrie, Caiete metodico-ştiinţifice, nr. 41*
16. MIRON, R. *Geometrie elementară*, E.D.P. Bucureşti, 1968
17. MODENOV, P.S. *Probleme de geometrie (limba rusă)*, Moscova, 1979
18. MOROZOVA, E.A. ş.a. *Olimpiadele internaţionale de matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978
19. MURGULESCU, E. DONCIU, N. *Culegere de geometrie analitică şi diferenţială I*, E.D.P. Bucureşti, 1971
20. NICOLESCU, L. BOSKOFF, V. *Probleme practice de geometrie*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1990
21. PANAITOPOL, L. OTTESCU, C. *Probleme date la olimpiadele de matematică*, E.D.P. Bucureşti, 1976
22. PETRIŞĂ, I. RUSU, I. *Probleme de matematică pentru treapta I de liceu*, Editura Albatros Bucureşti, 1976
23. PETRICĂ, I. ş.a. *Probleme de matematică pentru gimnaziu*, E.D.P. Bucureşti, 1985
24. PISMEREŢ M. POPA, S. *Probleme de geometrie elementară*, E.D.P. Bucureşti, 1979
25. SACTER O. *Olimpiade matematice*, Editura Tineretului, Bucureşti, 1979
26. SCHOENBERG, I. *Privelişti matematice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1989
27. SHARYGIN, I.F. *Problems in plane geometry*, Editura Mir, 1988
28. SIMIONESCU, GH. ŞTEFĂNESCU, V. *Aplicaţii ale calculului vectorial*, E.D.P. Bucureşti, 1975
29. TEODORESCU, N. (coordonator) *Culegere de probleme pentru concursurile de matematică*, S.S.M., 1977
30. ŢIŢEICA, Şt. *Probleme de geometrie*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1984
31. VODĂ, V.G *Triunghiul - ringul cu trei colţuri*, Editura Albatros Bucureşti, 1979

Bun de tipar: 29.06.1992

Tiparul executat sub cd. nr. 107
la S.C. „Dosoftei" — S.A.
str. Sf. Lazăr nr. 49 — Iaşi

EDITURA
„Gh. Asachi"

CONSTANTIN COCEA

200 DE PROBLEME
DIN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI ECHILATERAL

Lei: 145

ISBN 973—95650—4—2